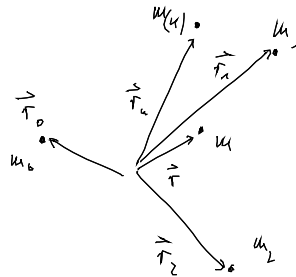


Potential $\varphi(\vec{r}) = - \sum_k \frac{G m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|}$ bzw. auch

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = 4\pi G \rho_M(\vec{r}) \quad \text{mit } \rho_M(\vec{r}) = \sum_k m_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k)$$

abgeleitet werden

Manne dicit ρ_M



Beweis für $\Delta \frac{1}{r} = 0$ im Ursprung
nicht aus, weil lineares Problem

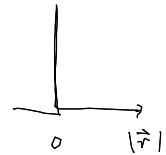
$$\Delta \varphi(\vec{r}) = 4\pi G m_0 \delta(\vec{r}), \quad \text{weil da jetzt so ist, so muß links auch } \varphi = - \frac{G m_0}{|\vec{r}|}$$

proportional zu $\delta(\vec{r})$ sein

$$\rightarrow \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r}) \quad \text{muß gezeigt werden}$$

2 Eigenschaften von $f(r) = \frac{1}{r}$, bzw. $\Delta f(r)$ müssen gezeigt werden:

a) $\Delta f = 0$, wenn $\vec{r} \neq 0$ / b) $\int d^3r \Delta f = -4\pi$



$$2a) \Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f(r) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\vec{\nabla} f(r) = \vec{e}_r \partial_r f(r) = \vec{e}_r f'(r)$$

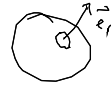
$\vec{\nabla}$: Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{e}_r f'(r)) = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 f'(r)) = \frac{1}{r^2} (2r f' + r^2 f'') = \frac{2f'}{r} + f''$$

$\vec{\nabla}$: in Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \Delta f = \frac{2}{r} \left(-\frac{1}{r^2}\right) + \frac{2}{r^3} = 0 \quad \checkmark \quad \int: r \neq 0$$

Erweitern $f = \frac{1}{r}$



2-b/

$$\int d^3r \Delta f = \int d^3r \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \oint d\vec{A} \cdot \vec{\nabla} f = R^2 \int d\Omega \int dy \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla}_r f(r)$$

Kugel um $\vec{r}=0$ mit Radius R Satz von Gauß Oberfläche integral über die Kugel R Betrag und Richtung von $d\vec{A}$ $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ r^2 \end{pmatrix}$ $f=R$

$$= - \int d\Omega \int dy f dy = -4\pi \quad \checkmark$$

Es gilt also das Potentialefeld gleich für Newton gravitation Theorie

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = 4\pi G \rho_M(\vec{r})$$

Potentiale durch Massendichte gegeben

in Notation der ART:

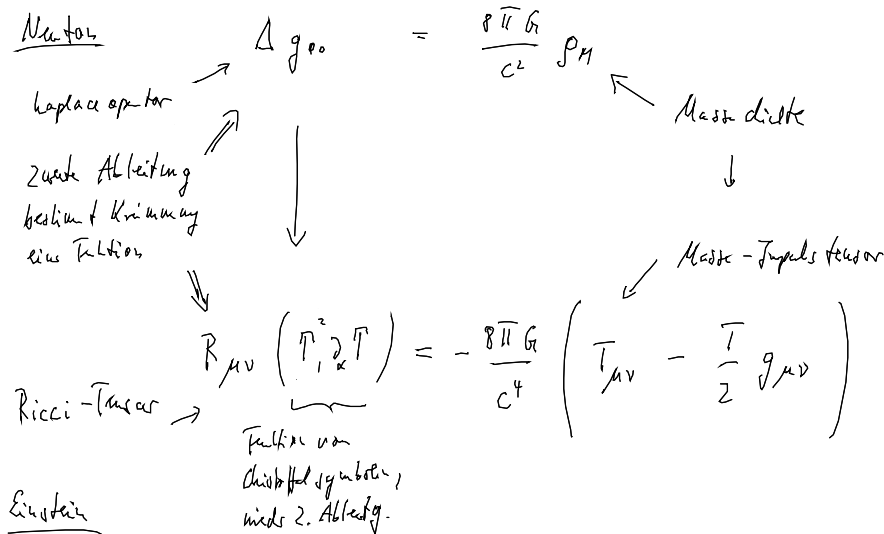
$$\Delta g_{00}(\vec{r}) = \frac{8\pi G \rho_M(\vec{r})}{c^2}$$

$\hat{=}$ Newton Grav. Fall

8.2. Einsteinsche Krallgemeinerung

Statt Laplace Gleichung f. g_{00} sollte $g_{\mu\nu}$ benutzt werden an Feldgleichung mit

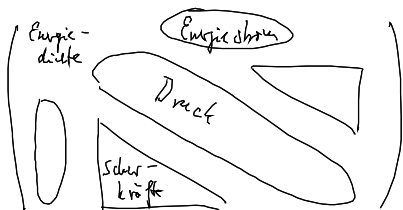
Quellen die auch Krallgemeinerung d. Massendichte enthält:



$$T_{\mu\nu} = \int_M u^\mu u^\nu \quad u^\mu = \gamma (c, v_1, v_2, v_3)$$

als einfacher Ansatz („Staub“)

≙ 16 Glieder, nichtlinear.



$$T = T_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$$

9. Schwarzschildmetrik und relativistisches Gravitationspotential

1916 Karl Schwarzschild

2 Mpe. Feldgleichungen zu lösen bzw $g_{\mu\nu}$ zu bestimmen:

a) direkt Feldgleichungen lösen, oft mit Ansätze verbunden

b) physikalisch Argumente um $g_{\mu\nu}$ zu raten, dann feste d. Einträge

Schwarzschild: räumlich isotrop, Newton potenz für $\varphi = -\frac{GM}{r}$ • \rightarrow Gravitationsfeld
M

\rightarrow keine Dichte abhängigkeit,

ohne Gravitation, Kugelkoordinaten

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2, \quad d\vec{r} \text{ in Kugelkoordinaten zerlegt: } \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} r \vec{e}_r$$

\rightarrow Produktregel

$$\text{mit } \frac{d\vec{r}}{dt} = r \vec{e}_r \frac{d\vartheta}{dt} + r \sin\vartheta \vec{e}_\varphi \frac{d\varphi}{dt} + \vec{e}_r \frac{dr}{dt} \rightarrow dr^2$$

$$\Downarrow ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2 - r^2 d\vartheta^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$$g_{\alpha\beta} \sim \delta_{\alpha\beta}, \quad g_{00} = 1, \quad g_{rr} = 1$$

g_{00} aus Störtheorie: $g_{00} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)$ und Isotropieannahme, statisch

$$g_{\alpha\beta}(t, \varphi, \vartheta, r)$$

→ durch in Feldgleichungen: "... lauge, lauge rechnen ..."

$$g_{rr} = g_{00}^{-1}$$

↓ Schwarzschildmetrik:

$$ds^2 = g_{00} c^2 dt^2 - g_{rr} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

Man kennt Feld $g_{\alpha\beta}$, aus $g_{\alpha\beta} \rightarrow$ Christoffel-Symbole \rightarrow Teilchenbahnen

9.2. Teilchenbahnen

$$\frac{d^2}{d\tau^2} x^\mu = - \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (\text{variante VL})$$

$$\text{mit } \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\sigma} \right)$$

↑
g's bekannt

Bsp: $\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r}$, für alle ϑ, φ, r ausrechnen \rightarrow Bewegungsgl. f. x^α

$$1/ \quad \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{B'}{B} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = 0, \quad A = g_{rr}, \quad B = g_{00}, \quad A' = \frac{dA}{dr}$$

$$2/ \quad \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{A'}{2A} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{r}{A} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{r \sin^2 \vartheta}{A} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 + \frac{B'}{2A} \left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 = 0$$

$$3/ \quad \frac{d^2 \vartheta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{d\vartheta}{d\tau} \frac{dr}{d\tau}\right) - \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0$$

$$4/ \quad \frac{d\varphi^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{dr} \right) + 2 \cot \vartheta \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\vartheta}{dr} = 0$$

man sieht aus:

(3) eine Lösung ist $\vartheta = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ Bewegung in Ebene

(4) gilt Drehimpuls erhaltung $\left(\frac{d\varphi}{dr} \right) r^2 = \text{konstant}$

(linker Term $\rightarrow 0, \vartheta = \frac{\pi}{2}$; zwei erste Terme \rightarrow Erhaltungsgröße)

(1) gilt Erhaltungsgröße: $B \frac{dt}{dr} = \text{konstant}$

aus (2) mit der Erhaltungsgröße findet man Bahngleichung:

$$\frac{dr^4}{dr^2} + \frac{A'}{2A} \left(\frac{dr}{dr} \right)^2 - \frac{e^2}{Ar^3} + \frac{c^2 B'}{2AB^2} k^2 = 0$$

die Konstanten sind $B \frac{dt}{dr} = k$ und $\frac{d\varphi}{dr} r^2 = l$

durch Multiplikation mit $2A \frac{dr}{dr}$ sieht man:

$$\frac{d}{dr} \left(A \left(\frac{dr}{dr} \right)^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{c^2 k^2}{B} \right) = 0$$

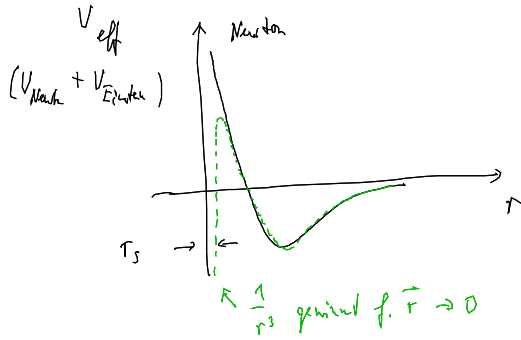
Konstante $\equiv -2E/m$, E wird in Nextagen fall folgelekt

A, B einsetzen, umstelle:

$$\underbrace{\frac{m \cdot 2}{2} r - \frac{GMm}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}}_{\text{Nextagen}} - \underbrace{\frac{c^2 r_s}{2mr^3}}_{\text{Einwirkkorrektur}} = \frac{m c^2 (k^2 - 1)}{2} \quad (l \rightarrow l \cdot m)$$

Nextagen, allerdings in r Einwirkkorrektur zum effektiven Potential $\sim -\frac{1}{r^3}$

und effektives Potential $-\frac{GMm}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$



Bemerkungen:

a) für $r \rightarrow 0$ entsteht ein Krater, wenn Himmelskörper (M) auf dem Radius R begrenzt ist
 der kleiner als der Schwarzschildradius $r_s = \frac{2GM}{c^2} > R$ (Schwarzes Loch⁴)

Sonne: $r_s = 1,5 \text{ km}$, $R = 10^5 \text{ km}$

b) warum schwarz? Emission v. Licht kann nicht erfolgen:

$$\omega_m = \sqrt{g_{00}} \omega_0 = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \omega_0 \quad \text{wenn } r < r_s \rightarrow \text{kein } \omega_0 \text{ für } \omega_m$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 Lichtfrequenz mit Grenzfrequenz oder Grenzfrequenz und $\sqrt{\quad}$ eine negative Zahl

c) Periheliondrift von Ellipse, ist ein weiteres Ergebnis

$$r(\varphi) = \frac{\alpha}{1 + e \cos\left(\left[1 - \frac{3r_s}{2\alpha}\right] \varphi\right)}$$

$r_s \neq 0 \rightarrow$ ergibt Abweichung von 2H Periheliondrift

\rightarrow Periheliondrift