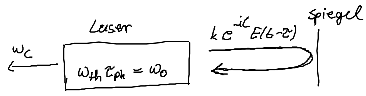
6.3.2. Stabilitätsgrenze der ersten externen Kavitätsmode beim Laser + Feedback



Beschrieben durch LK Gleichungen:

$$\dot{E} = (1+i\alpha) n E + k e^{-iC} E(t-\tau)$$
$$\dot{n} = \mu(J - n - (1+2n)|E|^2) \qquad \mu = \frac{\tau_{ph}}{T_1}$$

ω_c : Frequenz der stabilen Lösung mit Feedback

$\omega_0 = \omega_{th}\tau_{ph}$: Frequenz des Lasers an der Schwelle

- **Ziel:** Bestimmung der Grenze (der Feedbackstärke) an der die erste ECM die Stabilität verliert
- **Methode:** Nutzen der Existenzbedingung für periodische Lösungen

$$\langle x_0^*, \underline{f} \rangle = 0 \qquad \text{(Voraussetzung: } \underline{x}_0 \text{ ist periodisch)}$$

x_0^*: adjungierte homogene Lösung von $L\underline{x} = \underline{f}$

$\underline{f}$: Inhomogenität

Umschreiben der LK-Gleichungen in Gleichungen für Amplitude + Phase

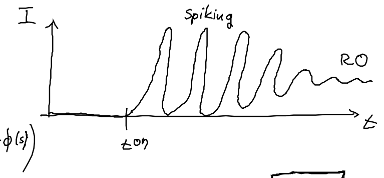
$$E = \sqrt{I}\, e^{i\Delta\phi}$$
$$\dot{E} = \sqrt{I}\, i\Delta\dot{\phi}\, e^{i\Delta\phi} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{I}}\dot{I}\, e^{i\Delta\phi}$$

$$\dot{E} e^{-i\Delta\phi} \overset{LK}{=} (1+i\alpha) n\sqrt{I} + k e^{-iC}\sqrt{I(t-\tau)}\, e^{i\Delta\phi(t-\tau)}\, e^{-i\Delta\phi(t)}$$
$$= (1+i\alpha) n\sqrt{I} + k e^{i(-C+\Delta\phi(t-\tau)-\Delta\phi(t))}\sqrt{I(t-\tau)} = \sqrt{I}\cdot i\Delta\dot{\phi} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{I}}\dot{I}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{I} &= 2nI + 2k\sqrt{I(t-\tau)I(t)}\cos(\Delta\phi(t-\tau) - \Delta\phi(t) - C) \\ \Delta\dot{\phi} &= \alpha n + k\sqrt{\frac{I(t-\tau)}{I(t)}}\sin(\Delta\phi(t-\tau) - \Delta\phi(t) - C) \\ \dot{n} &= \mu(J - n(1+2n)I) \end{aligned}}$$

Neue Variablen wie beim Einzellaser im Limit $\mu = \frac{\tau_{ph}}{T_1} \to 0$ (Class B mit sehr schwacher Dämpfung)

(vgl. VL vom 3.12.18)



$\omega^{RO} = \sqrt{\mu \cdot 2J}$

RO-Frequenz

"Intensität" $y' = (1+y)x + 2\frac{k}{\omega_{RO}}\sqrt{(1+y)(1+y(s-\tilde{\tau})}\cos(-C + \phi(s-\tilde{\tau}) - \phi(s))$

"Phase" $\phi' = \frac{\alpha}{2}x + \frac{k}{\omega_{RO}}\sqrt{\frac{1+y(s-\tilde{\tau})}{1+y(s)}}\sin(-C + \phi(s-\tilde{\tau}) - \phi(s))$

"Inversion" $x' = -y - \frac{\omega_{RO}}{2J}x(1 + 2J(1+y))$

Problem 0. Ordnung $\hat{=}$ Konservatives OGL-System mit periodischer Lösung

Inhomogenität $\underline{f}$: Störung in 1. Ordnung in $\sqrt{\mu}$

Transformation:

neue Zeit s: $t = s\cdot\omega_{RO}$

Intensität: $I = 2J + Ay$

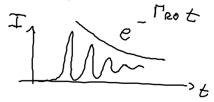
Inversion: $n = 0 + Bx$

steady state - Wert

- Im Fall $\frac{k}{\omega_{RO}} = O(\omega_{RO})$ und $\omega_{RO} \to 0$ (wegen $\sqrt{\mu} \to 0$) dann ist das 0. Ordnungsproblem konservativ und hat periodische Lösungen

Spikinglösung $\hat{=} \underline{x}_0$

<u>ABER</u>: für $k=0$ mit $\mu \neq 0$ sind Lösungen gedämpft, d.h. nicht periodisch



für $k > 0$, also mit Feedback werden ROs wieder entdämpft

$\to$ suchen $\underline{k}$ bei dem Lösungen wieder periodisch sind

1) Linearisieren des 0. Ordnungsproblems (ohne Phase)

$$\delta\dot{\underline{x}} = Df|_{\underline{x}_0} \, \delta\underline{x}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1+y_0(t) & x_0(t) \end{pmatrix} \underline{\delta x}$$

periodisch

$$\delta\underline{x} = \underline{x} - \underline{x}_0(t)$$

$$L \equiv \frac{d}{dt} \mathbb{1} - Df|_{\underline{x}_0(t)}$$

adjungiertes Problem $\quad L^* \delta\underline{x}^* = 0$

$$0 = \left[-\frac{d}{dt}\mathbb{1} - \begin{pmatrix} 0 & 1+y_0 \\ -1 & x_0(t) \end{pmatrix} \right] \delta\underline{x}^*$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta\dot{x}^* = -(1+y_0)\,\delta y^*$$
$$\delta\dot{y}^* = \delta x^* - x_0\,\delta y^*$$

wir wissen $\langle \delta\underline{x}, \delta\underline{x}^* \rangle = 0$

$$\int dt \left(-y_0\,\delta x^* + (1+y_0)\,x_0 \right) \delta y^* = 0 \quad \to \quad \delta y^* = \frac{y_0}{1+y_0}$$

Lösung des adjungierten Problems :

$$\underline{\underline{\delta\underline{x}^* = \begin{pmatrix} x_0 \\ \frac{y_0}{1+y_0} \end{pmatrix}}}$$

Periodizitätsbedingung aus dem Satz vom (21.1.)

$$\langle \delta\underline{x}^*, \underline{f} \rangle = 0$$

Einsetzen :
$$0 \overset{!}{=} \frac{2k_H}{\omega_{RO}} \int_0^P \sqrt{(1+y_0)(1+y_0(s-\tau))}\, \cos(-C + \phi(s-\tau) - \phi(s))\, \frac{y_0}{1+y_0} - \frac{\omega_{RO}}{2\gamma} x_0^2 (1+2\gamma(1+y_0))\, ds$$

⋮ ein paar Näherungen für $\sqrt{}$ und Taylorentwicklung des cos-Terms

$$k_H = \frac{-(1+2\gamma)}{2T_1} \frac{1}{\cos C + \alpha \sin C}$$

mit $\Gamma_{RO} = \frac{1+2\gamma}{2T_1} = \gamma \frac{(1+2\gamma)}{2}$

kritische Feedbackstärke, ab der periodische Lösungen existieren.

$$k_H = \frac{\Gamma_{RO}}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{1}{\sin(C - \arctan\alpha)}$$

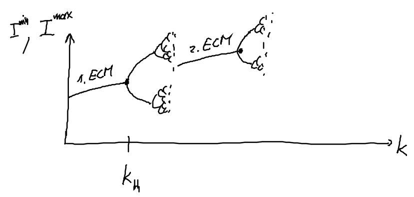
Abschätzung für untere Grenze der Hopf-Bifurkation

$\sin(C - \arctan\alpha) = 1$

$$(*) \quad \boxed{k_H \geq \frac{\Gamma_{RO}}{\sqrt{1+\alpha^2}}}$$

- Sobald Feedback den Einfluss der RO-Dämpfung kompensieren kann wird die Lösung wieder periodisch, d.h. Laser emittiert nicht mehr stabil auf der 1. ECM.

- Class A Laser sehr viel unempfindlicher gegenüber optischem Feedback (trotzdem existieren im Class A Fall viele ECM Lösungen und können multistabil sein)



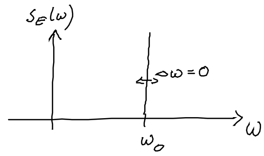
Hopf-Bifurkation gegeben durch $(*)$ —> gegeben durch Ladungsträgerdynamik und die Amplituden-Phasen Kopplung.

6.4. Bestimmung der Linienbreite eines Lasers

Bisher: Laser emittiert mit konstanter optischer Frequenz ω_0

E ist reelle Größe im rotating frame

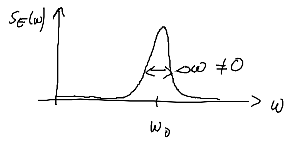
Linienbreite $\Delta\omega = 0$



In Realität: Laseremission enthält spontane Emission

d.h. Rauschen auf der E-Feld Amplitude

Frage: Welchen Einfluss hat das Rauschen auf die Linienbreite



Bekannt aus Kapitel 3:

(1) Lineare DGL mit Rauschen —> Varianzmatrix $\underline{\underline{\sigma}}$ bestimmbar

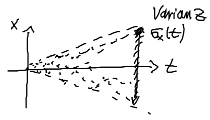
$$d\underline{X}_t = \underline{\underline{A}} X_t \, dt + \underline{\underline{B}} \, dW \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma}} = \langle X_t \otimes X_t \rangle$$

Wiener Prozess

$$= \int_0^t e^{\underline{\underline{A}}(t-t')} \, \underline{\underline{B}} \, \underline{\underline{B}}^T e^{\underline{\underline{A}}(t-t')} \, dt'$$

② 1. dim DGL $\dot{x} = \lambda x + b\xi$

Gauß'sches weißes Rauschen

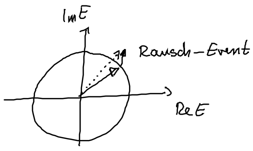


Varianz

$\lambda = 0 \longrightarrow \sigma_{xx} = b^2 t$ Wiener Prozess "random walk", σ_{xx} unbegrenzt

$\lambda \neq 0 \longrightarrow \sigma_{xx} = \frac{-b^2}{2\lambda}$ Ornstein-Uhlenbeck Prozess, σ_{xx} begrenzt

Bsp. Laser



Amplitude ist gedämpft

Phase vollführt einen Random Walk

$\rightarrow$ Linienbreite $\Delta\omega$

unbegrenzt durch random walk

$$\Delta\omega = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sigma_{\phi\phi}(t)$$

Aus Varianz der Phase kann Linienbreite berechnet werden.