Ergebnis der Näherungen

- Maxwell-Gl. + Modenansatz
- Schrödinger Gl. für 2-Niveau System (lokal)
- RWA, SVEA

▷ makroskopische Gleichungen im homogenen Medium

μ_{12}, $u_\lambda(x_n)$ nicht n-abhängig

Ort des 2-Niveau Systems

$$\dot{E}_\lambda^{\pm} = (\mp i\omega_\lambda - \kappa_\lambda) E_\lambda^{\pm} \pm i\frac{1}{2\varepsilon_0}\bar{\omega}\, P_\lambda^{\pm}$$

$\kappa_\lambda = \frac{\sigma_\lambda}{2\varepsilon_0}$ optische Verluste

$$\dot{\underline{p}}^{+} = (-i\bar{\omega} - \gamma)\,\underline{p}^{+} + \frac{1}{i\hbar}\sum_\lambda E_\lambda^{+}(u_\lambda \underline{e}_\lambda \underline{\mu}_{21})\,\underline{\mu}_{12}\, D$$

$$\dot{D} = \frac{D_0 - D}{T_1} - \frac{2}{i\hbar}\sum_\lambda \left(u_\lambda \underline{e}_\lambda \left(E^{+}\underline{p}^{-} - E^{-}\underline{p}^{+}\right)\right)$$

$$P_\lambda^{+} = \int u_\lambda(x)\, \underline{e}_\lambda\, \underline{P}^{+}\, dx$$

$$= \int dx\, u_\lambda(x)\, \underline{e}_\lambda \sum_n \delta(x - x_n)\, \underline{\mu}_{21}^{n} p_n$$

$$\left[\, P_\lambda^{+} = \sum_n u_\lambda(x_n)\, \underline{e}_\lambda\, \underline{\mu}_{21}^{n}\, p_n \,\right]$$

WW mit Resonatormoden aber keine direkte WW der Lichtmoden untereinander

E_2, $\hbar\bar{\omega}$, E_1

Falls Medium inhomogen (nicht alle Atome identisch)

lokale Gleichungen für p_n und d_n

$$(\text{III}')\qquad \dot{p}_n = -i\bar{\omega} p_n - \gamma p_n - \frac{1}{i\hbar} E_n(t)\, \underline{\mu}_{21}^{n}\, d_n$$

$$(\text{IV}')\qquad \dot{d}_n = \frac{2}{i\hbar}\left(E_n^{+}\, \underline{\mu}_{12}^{n\,*}\, p_n^{*} - c.c.\right) + \frac{d_0 - d}{T}$$

Bemerkung: • In 2. Quantisierung mit klass. Feld, werden die Gleichungen über Fundamentalrelation abgeleitet

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{F}\rangle = \left\langle \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{F}] + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t}\right\rangle$$

Besetzung $f^2 = \langle a_2^{+} a_2\rangle$

$f^1 = \langle a_1^{+} a_1\rangle$

$d = f^2 - f^1$

wobei $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{opt}$

$E_2 a_2^{+} a_2 + E_1 a_1^{+} a_1$ $\qquad$ $\underline{\mu}\,\underline{E}(t)\,(a_2^{+} a_1 + a_1^{+} a_2)$

$p = \langle a_1^{+} a_2\rangle$

$p^{*} = \langle a_2^{+} a_1\rangle$

=> es folgen identische Gleichungen wie III', IV'

• Mit zusätzlich quantisiertes Lichtfeld: kann spontane Emission beschrieben werden über WW mit Vakuumfluktuationen der leeren Kavität

Jaynes-Cummings Hamiltonian (RWA)

$$\hat{H}_{JC} = \hbar\omega c^{+} c + \frac{1}{2}\hbar\bar{\omega}\hat{\sigma}_z + \hbar g(\hat{\sigma}_{+}\hat{c} + \hat{\sigma}_{-}\hat{c}^{+})$$

Photon Erzeuger

$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Auf- und Absteiger Operatoren im Atom $\left\{ \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$

Dimensionslose Formulierung der Lasergleichung

$$E_\lambda^+(t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0}}\, a_\lambda(t)$$

$$E_\lambda^-(t) = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0}}\, a_\lambda^*(t)$$

motiviert durch Übergang zur QM Beschreibung

↳ $a_\lambda^* a_\lambda$ ergibt die Photonenzahl und $|E_\lambda|^2$ die Intensität

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot a_\lambda &= (\underbrace{-i\omega_\lambda}_{\text{osz}} \underbrace{- \kappa_\lambda}_{\text{Dämpfg}})\, a_\lambda - \underbrace{i\sum_n g_{\lambda n}^* p_n}_{\text{Antrieb durch Polarisation}} \\ \dot p_n &= (\underbrace{-i\bar\omega_n}_{\text{osz.}} \underbrace{- \gamma}_{\text{Dämpfg}})\, p_n + \underbrace{i\sum_\lambda g_{\lambda n} a_\lambda d_n}_{\text{Kopplung an Licht}} \\ \dot d_n &= \underbrace{\frac{d_0 - d}{T_1}}_{\text{Pump + Verluste}} + \underbrace{2i\sum_\lambda \left(g_{\lambda n}^* p_n a_\lambda^* - c.c.\right)}_{\text{Kopplung an Licht}} \end{aligned}}$$

mit $g_{\lambda n} := i\mu_{21}^n\, \varepsilon_\lambda\, u_\lambda(x_n) \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{\hbar\, 2\varepsilon_0}}$

$$\left(E(x,t) = \sum_\lambda E_\lambda(t)\, \varepsilon_\lambda\, u_\lambda(x) \right)$$

$$E_n(t) = \sum_\lambda E_\lambda(t)\, \varepsilon_\lambda\, u_\lambda(x_n)$$

mit Zahl Moden λ M, und Zahl der Atome N, sind das $2N+M$ gekoppelte DGLs

5.3. Stationäre Lösungen im Ein-Moden Betrieb

Grundgleichungen (eine Mode)

(I'') $\dot a = (-i\omega - \kappa)\, a - i\sum_n g_n^* p_n$ ← Feldamplitude der Mode λ mit $\omega_\lambda = \omega$, $\kappa_\lambda = \kappa$, $g_{\lambda n} = g_n$

(III'') $\dot p_n = (-i\bar\omega_n - \gamma)\, p_n + i g_n d_n a$

(IV'') $\dot d_n = \frac{d_0 - d_n}{T_1} + 2i\left(g_n^* p_n^* a - c.c.\right)$

↑ Frequenz des leeren Resonators

Fixpunkte

(i) $a = 0$, $p_n = 0$, $d_n = d_0$ — unterhalb der Schwelle stabil

(ii) Ansatz

$$a(t) = a^{ss}\, e^{-i(\Omega_L t + \varphi)}$$

d.h. konstante Intensität (oder Photonenzahl)

$(a^{ss})^2 = a(t)a^*(t) = const.$

$$p_n(t) = p_n^{ss}\, e^{-i(\Omega_L t + \varphi)}$$

$p_n^{ss} = const$; $a^{ss} = const$

Ω_L Laserfrequenz der Lösung

$$d_n = d_n^{ss}$$

Einsetzen in $(\mathrm{I}'' - \mathrm{III}'' - \mathrm{IV}'')$

$$\mathrm{III}'' \rightarrow p_n^{ss} = \frac{-g_{\lambda n}\, d_n^{ss}\, a^{ss}}{\Omega_L - \bar\omega_n + i\gamma}$$

$$(*_1) \quad d_n^{ss} = \frac{d_0}{1 + 2T_1 G_{\lambda n} (a^{ss})^2}$$

mit $G_{\lambda n} = |g_{\lambda n}|^2 \dfrac{2\gamma}{(\Omega_L - \bar\omega_n)^2 + \gamma^2}$

Einstein Koeffizient der stimulierten Emission
(jetzt mikroskopisch aus Materialparametern bekannt)

Vergleich mit 4.1. Ratengleichungen:
aus dimensionsbehafteter Inversionsgl. folgt

$$\bar{D}^{ss} = \frac{\bar{D}_0}{1 + 2 G T_1 N_{ph}}$$

mit $G = G_{\lambda n}$ da nur eine Mode in Ratengleichung und keine Inhomogenität

Einsetzen von p_n^{ss} in (I') und separieren nach Real- und Imaginäranteilen

$$\text{Re:} \quad \left[-\kappa + \sum_n |g_{\lambda n}|^2 \frac{\gamma}{(\Omega_L - \bar{\omega}_n)^2 + \gamma^2} d_n^{ss} \right] a^{ss} = 0$$

$$\hookrightarrow \quad \left(-\kappa + \sum_n \frac{1}{2} G_{\lambda n} d_n^{ss} \right) a^{ss} = 0$$

Falls homogenes Medium folgt $-\kappa + \frac{1}{2} G D^{ss} = 0$

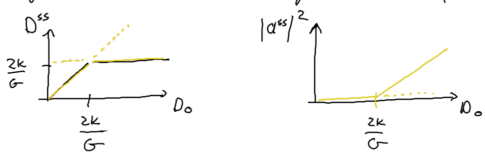
$\frac{1}{2\kappa} = \tau_{ph}$

$$D^{ss} = \frac{2\kappa}{G} = \frac{1}{\tau_{ph} G}$$

d.h. $D = G \tau_{ph} D^{ss} = 1$

gleiche stationäre Lösungen für D^{ss} und $|a^{ss}|^2$

aus $*_1$: $a_{ss}^2 = \frac{D_0 G \tau_{ph} - 1}{2 T_1 G}$



aus $(*_1)$

Imaginärteil von (I') Gleichung

$$\left(\Omega_L - \omega + \sum_n |g_{\lambda n}|^2 \frac{\Omega_L - \bar{\omega}_n}{(\Omega_L - \bar{\omega}_n)^2 + \gamma^2} d_n^{ss} \right) a^{ss} = 0$$

falls homogenes Medium vorliegt:
(Einsetzen der Re-Gleichung)

$$\boxed{\omega - \Omega_L = - \frac{\bar{\omega} - \Omega_L}{\gamma} 2\kappa}$$

← Aussage über Laserfrequenz Ω_L im Laserbetrieb

$$\boxed{\Omega_L = \underbrace{\omega \frac{\gamma}{\gamma + \kappa}}_{\text{leerer Resonator}} + \underbrace{\bar{\omega} \frac{\kappa}{\gamma + \kappa}}_{\text{2 Niveau System}}}$$

- Die Modenfrequenz des leeren Resonators ω durch WW von Licht + Materie zu Ω_L verschoben.
- Verschiebung wächst wenn κ und γ auf gleicher Zeitskala liegen
- falls $\gamma \gg \kappa$ "Photonen leben länger als Polarisation"

$\Rightarrow \Omega_L = \omega$

- keine Verschiebung
- Ratengleichungsfall

<u>Bem.</u>: für inhomogene Medien hängt die Frequenzverschiebung $\omega - \Omega_c$ zusätzlich von der Inversion, d.h. von der Intensität $(\alpha^{ss})^2$ ab!

Amplituden – Phasen – Kopplung