

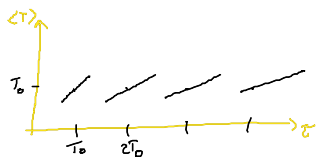
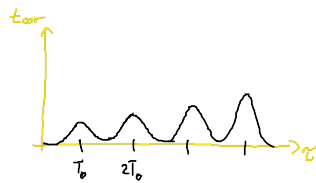
# Vom der Pol Oszillator mit Rauschen + Delay

wir wissen: stochastische Dynamik charakterisierbar durch Korrelationszeit  $t_{cor}$

- lineare SDE  $t_{cor} \sim \frac{1}{\lambda}$   $\lambda$ : Eigenwert der lin. homogenen Dynamik

- nichtlineare SDE mit Rauschen der Stärke  $D$   
 $\rightarrow t_{cor}(D) \neq const$

numerische Beobachtung beim Van Pol Oszillator



$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (\epsilon - x^2) y - \omega_0^2 x + K(y(t-\tau) - y(t)) + D\xi \end{aligned}$$

↑  
nichtlineare Dämpfung

$K$ : Rückkopplungsstärke

$D$ : Rauschstärke

$\omega_0^2$ : Eigenfrequenz

$\epsilon < 0 \rightarrow$  stabiler Fokus bei  $x=y=0$

- Erklärung durch Eigenmoden des linearisierten Systems: (ohne Rauschen)

Suche charakteristische Gleichung:

$$\ddot{x} - \epsilon \dot{x} + \omega_0^2 x - K(\dot{x}(t-\tau) - \dot{x}(t)) = 0 \quad \text{mit Ansatz } x \sim e^{\lambda t}$$

$$\rightarrow \boxed{\lambda^2 - \lambda \epsilon + \omega_0^2 - K\lambda(e^{-\lambda\tau} - 1) = 0}$$

1. Frage: Gibt es eine Delay-induzierte Hopf-Bifurkation?

Suche  $\lambda = iq$

$$\text{Re: } -q^2 + \omega_0^2 - Kq \sin q\tau = 0 \quad (1)$$

$$\text{Im: } -\cancel{q}\epsilon + K\cancel{q}(1 - \cos q\tau) = 0 \quad (2)$$

$$\rightarrow \cos q\tau = \frac{K - \epsilon}{K}$$

$\underbrace{\leq 1} \quad \underbrace{\frac{K}{K} > 1}$   $\downarrow$

$\rightarrow$  keine Hopf-Bifurkation!

$\rightarrow$  Oszillationen müssen <sup>vom</sup> Rauschen kommen.

2. Idee: Suche Mode des FP, die schwach stabil ist, d.h.  $\lambda = p + iq$  mit  $p \approx 0$   
 ( $p=0$  ist ausgeschlossen)

(2)  $\rightarrow \cos q\tau \approx 1$   
 $q\tau \approx 2\pi n \quad n \in \mathbb{N}$

$\frac{\tau}{q} = \frac{2\pi}{q} \approx \frac{\tau}{\omega}$  "stückweise linear in  $\tau$ "  
 charakteristische Frequenz im System

$q = \frac{2\pi n}{\tau} \rightarrow (1) \rightarrow q^2 = \omega_0^2 \rightarrow \tau = \frac{2\pi n}{\omega_0}$  am Maximum von  $\tau_{\text{osc}}$  ist (wahrscheinlich)  $p \approx 0$ ,

Wunsch: analytische Form für das Spektrum der Oszillationen (VdP + Rauschen)  
 wäre einfach für lineare SDE (Spektrum über Wiener-Korrelation aus  $\Psi(s)$ )

Methode: Mean-field Näherung der VdP - Oszillation

Näherung:  $\epsilon - x^2 \approx \tilde{\epsilon} \equiv \epsilon - \langle x^2 \rangle$

gilt für  $D \ll |\epsilon|/\omega_0$   
 also wenig Rauschen

$\dot{x} = y$   
 $\dot{y} = \tilde{\epsilon} y - \omega_0^2 x + D f(t)$  linear!

SDE  $dx = \underline{A} x dt + \underline{B} dW(t)$

$dW_x = f(t) dt$   
 $dW_y = g(t) dt$   
 $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$   
 $\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \tilde{\epsilon} \end{pmatrix}$   
 $\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$

Ko-Varianz-Matrix  $\underline{\Sigma}^z = \langle x(t) \otimes x(t) \rangle$   
 $= \frac{D^2}{-2\tilde{\epsilon}} \begin{pmatrix} 1/\omega_0^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

siehe VL vom 19.11.

$\langle x^2 \rangle = \Sigma_{11}^z = -\frac{D^2}{2\tilde{\epsilon}\omega_0^2} = \frac{D^2}{-2(\epsilon - \langle x^2 \rangle)\omega_0^2}$  selbstkonsistente Gleichung für  $\langle x^2 \rangle$

$\langle x^2 \rangle^2 - \epsilon \langle x^2 \rangle - \frac{D^2}{2\omega_0^2} = 0$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\epsilon}{2} \pm \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 + \frac{2D^2}{\epsilon^2 \omega_0^2}}$$

> 1

"+" unphysikalische Lösung da  $\epsilon < 0$  und  $\langle x^2 \rangle > 0$  sein muss.

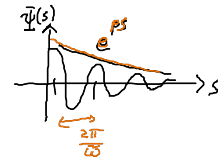
$$\Rightarrow \tilde{\epsilon} = \epsilon - \langle x^2 \rangle = \frac{\epsilon}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2D^2}{\epsilon^2 \omega_0^2}} \right) \quad (*)$$

$\tilde{\epsilon}$ : Dämpfung des VdP Osz.  
 → hängt vom Rauschen ab (nimmt mit D zu)

(EW von A  $\lambda_{1,2} = p \pm i\tilde{\omega}$ )

Autokorrelationsfunktion

$$\tilde{\Psi}_{yy}(s) = \langle y(t) y(t+s) \rangle = \tilde{\Psi}_{yy}(0) \operatorname{Re} e^{\lambda_1 s} \sim \tilde{\Psi}_{yy}(0) e^{ps} \cos \tilde{\omega} s$$



wobei  $\lambda_{1,2} = p \pm i\tilde{\omega} = \frac{\tilde{\epsilon}}{2} \pm \sqrt{\frac{-\tilde{\epsilon}}{4} + \omega_0^2}$

$p = \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$

⇒ Korrelationszeit

$$t_{\text{cor}} = \frac{1}{\tilde{\Psi}_{yy}(0)} \int_0^{\infty} |\tilde{\Psi}_{yy}(s)| ds \sim \frac{2}{\pi p} \quad (\text{siehe 3.3.})$$

mit (\*)

→  $t_{\text{cor}}$  hängt ab von Rauschstärke D (durch Mean-field Ansatz für  $\epsilon$ )

$$t_{\text{cor}} \sim \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{2D^2}{\epsilon^2 \omega_0^2}}}$$



Mit Kontrolle  $K \neq 0$  :

$$\lambda^2 - \tilde{\epsilon} \lambda + \omega_0^2 - K \lambda (e^{-\lambda \tau} - 1) = 0$$

(linearer VdP durch Mean-field Näherung)

unendliche viele EW  $\lambda_j^e = p_j^e + i q_j^e$

Die 2 Eigenwerte  $\lambda_{1,2}^e = \delta_p \pm i(1 + \delta_p) \omega_0$  mit betragsmäßig kleinster  $|\delta_p|$

sind entscheidend für Empfindlichkeit bezgl. Rauschen.

$$t_{cor} = -\frac{2}{\pi \tilde{\epsilon}_p} \approx \frac{4}{\pi |\tilde{\epsilon}|} \left(1 + \frac{K}{2} \tau\right)$$

Beweis kommt aus  
Entwicklung der EW für  
 $|\tilde{\epsilon}_p| \ll 1$

Spektrum  $S(\omega, K)$  der Dynamik des VdP durch Lösen der DGL im  
Fourierraum mit Mean-field Näherung

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{x}(\omega)$$

VdP Gleichungen: (I)  $-i\omega \tilde{x}(\omega) = \hat{y}(\omega)$   
(II)  $-i\omega \hat{y}(\omega) = \tilde{\epsilon} \hat{y}(\omega) - \omega_0^2 \tilde{x}(\omega) + D \hat{f}(\omega) + K \hat{y}(\omega) (e^{i\omega\tau} - 1)$

Eliminiere  $\tilde{x}(\omega) = \frac{i}{\omega} \hat{y}(\omega)$

$$\Rightarrow -i\omega \hat{y} - \tilde{\epsilon} \hat{y} + \frac{i\omega_0^2}{\omega} \hat{y} - K(e^{i\omega\tau} - 1) \hat{y} = D \hat{f}$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{i\omega D \hat{f}(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega \tilde{\epsilon} - i\omega K(e^{i\omega\tau} - 1)} \quad (\text{K.1})$$

$$(III) \quad \langle \hat{y}(\omega) \hat{y}^*(\omega') \rangle = \frac{\downarrow (i\omega D / (-i\omega' D) \langle \hat{f}(\omega) \hat{f}^*(\omega') \rangle) \quad \uparrow [= \delta(\omega - \omega')]}{(\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega[\tilde{\epsilon} + K(e^{i\omega\tau} - 1)]) (\omega'^2 - \omega_0^2 - i\omega'[ \tilde{\epsilon} + K(e^{i\omega'\tau} - 1)])}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}(\omega) \hat{f}^*(\omega') \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-i\omega' t'} \langle f(t) f^*(t') \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega')t} \underbrace{\langle f(t) f^*(t) \rangle}_{\delta(t-t')} \\ &= \delta(\omega - \omega') \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Zurücktrafo in den Zeitraum, dann Wiener-Khinchin

$$(IV) \quad \begin{aligned} \langle \hat{y}(\omega) \hat{y}^*(\omega') \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-i\omega' t'} \langle y(t) y(t') \rangle \quad \underline{t' = t+s} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega')t} \left( \frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i\omega'(\underbrace{t-t'}_s)} \langle y(t) y(t+s) \rangle \\ &\quad \underbrace{\delta(\omega - \omega')}_{\text{K.1}} \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i\omega' s} \langle y(t) y(t+s) \rangle \right)}_{\text{Re K.1}} \end{aligned}$$

Vergleich von III & IV =>

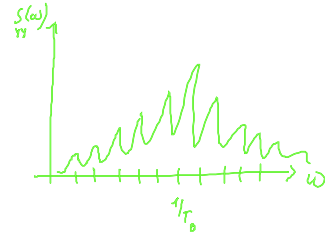
$S_{yy}(\omega)$

$$S_{yy}(\omega) = \frac{D^2}{2\pi} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2 + \omega K \sin \omega \tau)^2 + \omega^2 (\tilde{\epsilon} - K(1 - \cos \omega \tau))^2}$$

$K=0$   $S_{yy}(\omega) = \frac{D^2}{2\pi} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \tilde{\epsilon}^2}$



$K \neq 0$



Spektrum mit Maxima bei  $n \cdot 1/T_0$   
 → durch Rauschen angeregte Eigenmoden.