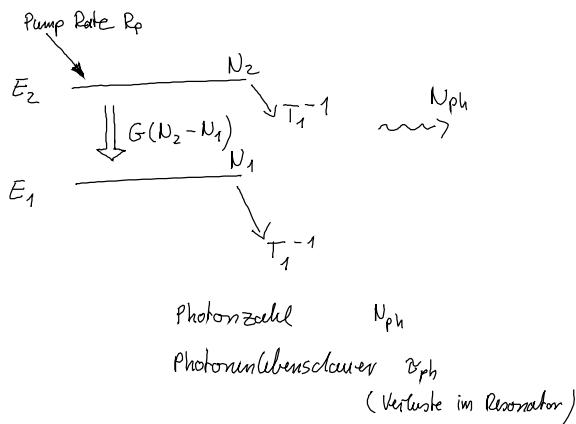


# 4. Nichtlineare Dynamik am Beispiel des Lasers

## 4.1. Laser - Ratengleichungen



- 2 Niveausystem  $E_2, E_1$   
 $N_2, N_1$  Besetzung der Niveaus  
 $N_2 - N_1$ : Inversion
- Lebensdauer der Ladungsträger  $T_1$
- $G$  Verstärkung (Licht-Materie Wechselwirkung)  
 durch stimulierte Emission und Absorption
- Pump Rate  $R_p$  um 2 Niveausystem aus dem Gleichgewicht zu bringen, d.h. zu invertieren

## Bilanzgleichungen Licht-Materie WW

$$\frac{dN_{ph}}{dt'} = G(N_2 - N_1) N_{ph} - \frac{N_{ph}}{\tau_{ph}}$$

Dynamik der mittleren Besetzungszahlen und mittlere Photonanzahlen in der Kavität.

Inversion  $\bar{D} = N_2 - N_1$

$$\frac{d\bar{D}}{dt'} = \frac{1}{T_1} (D_0 - \bar{D}) - 2G\bar{D}N_{ph}$$

$D_0 = R_p T_1$  normierte Pumprate

## Dimensionslose Formulierung

$I = 2GT_1 N_{ph}$

$D = G\tau_{ph} \bar{D}$

$t = \frac{t'}{\tau_{ph}}$

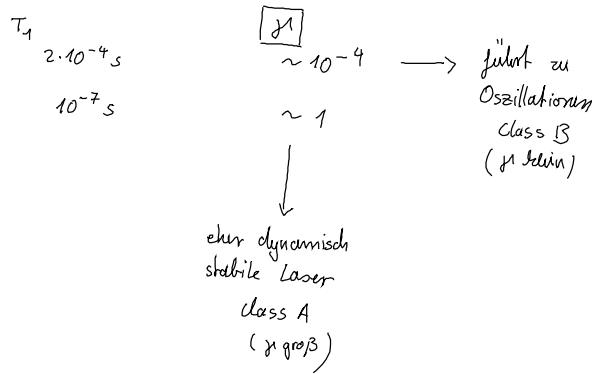
$y = \frac{\tau_{ph}}{T_1}$

$P = G\tau_{ph} R_p T_1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dI}{dt} = \dot{I} = I(D - 1) \quad (I) \\ \frac{dD}{dt} = \dot{D} = y(P - D(1 + I)) \quad (II) \end{array} \right.$$

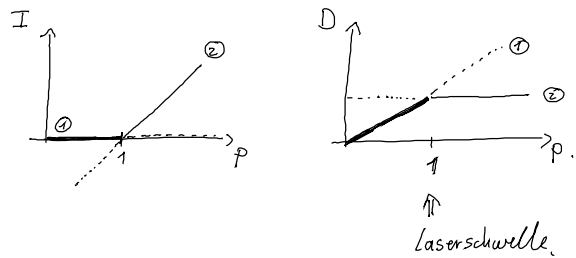
Beispiele für modulierte Laser

Festkörperlaser	$\tau_{ph} \sim 10^{-8} s$	$T_1 \sim 2 \cdot 10^{-4} s$
He-Ne Gaslaser	$2 \cdot 10^{-7} s$	$10^{-7} s$



Stabilitätsanalyse von (I), (II)

- Fixpunkte
- ①  $I = 0, D = P$
  - ②  $I = P - 1, D = 1$



Stabilität  $DF = \begin{pmatrix} D-1 & I \\ -D\gamma & -(1+I)\gamma \end{pmatrix}$

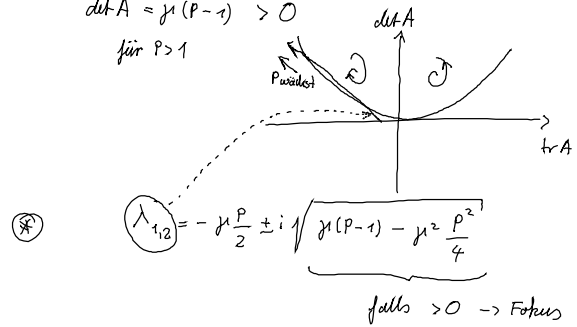
$A|_1 = \begin{pmatrix} P-1 & 0 \\ -P\gamma & -\gamma \end{pmatrix}$

$\rightarrow \lambda_1 = P-1, \lambda_2 = -\gamma$  stabil für  $P < 1$

$A|_2 = \begin{pmatrix} 0 & P-1 \\ -\gamma & -P\gamma \end{pmatrix}$

$\rightarrow \lambda^2 + \gamma P \lambda + \gamma(P-1) = 0$

$\text{tr} A = -\gamma P < 0$   
 $\det A = \gamma(P-1) > 0$   
 für  $P > 1$



Grenzfälle

1)  $\gamma$  klein : Taylorentwicklung der Wurzel von \*

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2} \Delta x f'(x_0)$

d.h.  $\sqrt{\gamma} \sqrt{\underbrace{(P-1)}_{x_0} - \underbrace{\gamma \frac{P^2}{4}}_{\Delta x}}$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \frac{P}{2} \pm i \sqrt{\gamma(P-1)} + \mathcal{O}(\gamma^{3/2})$$

Dämpfungsrate

$$\Gamma = -\gamma \frac{P}{2}$$

Relaxationsfrequenz

$$\omega_{RO} = \sqrt{\gamma(P-1)}$$

d.h. stabiler Fokus für  $P > 1$

2)  $(P-1)$  klein, d.h. „in der Nähe der Schwelle  $P=1$ “

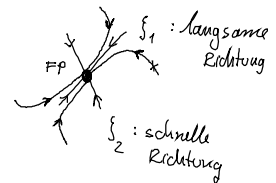
wieder Taylor, diesmal  $\Rightarrow x = \gamma(P-1)$   
 $x_0 = \frac{\gamma^2 P^2}{4}$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma P}{2} \pm \sqrt{\gamma^2 \frac{P^2}{4} - \gamma(P-1)}$$

$$\lambda_{1,2} \approx -\frac{\gamma P}{2} \pm \left( \underbrace{\frac{\gamma P}{2}}_{f(x_0)} - \underbrace{\gamma(P-1) \frac{2 \cdot 1}{\gamma P}}_{f'(x_0)} \right)$$

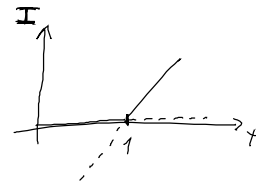
$$\lambda_1 = -\frac{P-1}{P} \quad (\text{langsam da } \lambda_1 \approx 0)$$

$$\lambda_2 = -\gamma P + \frac{P-1}{P} \quad (\text{schnell})$$



stabiler Knoten für  $P > 1$

Bem.: bei  $P=1$  ist eine transkritische Bifurkation



• Einführung der elektrischen Feldamplitude

$$|E|^2 = I$$

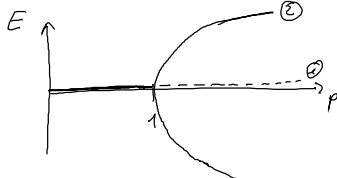
$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \dot{E} &= \frac{1}{2} E (D-1) \\ \text{(II)} \quad \dot{D} &= \gamma (P - D(1+E^2)) \end{aligned}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} (E^2) = 2\dot{E}E$$

o.B.d.A. (Annahme  $E$  sei reell)

$$\begin{aligned} &\text{Dimensionsbehaftete Größe } \bar{E} \\ &E = \sqrt{2G T_1} \bar{E} \\ &|\bar{E}|^2 = N_{ph} \end{aligned}$$

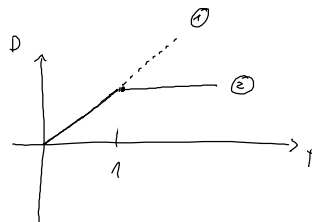
Stationäre Lösungen (Fixpunkte)



$$\textcircled{1} \quad E=0, \quad D=P$$

$$\textcircled{2} \quad E = \pm \sqrt{P-1}, \quad D=1$$

immer stabil  
( $P < 1$  existiert er nicht)



- An der Schwelle ist eine Pitchfork - Bifurkation

## 4.2 Normalform der Laser-Ratengleichungen an der Schwelle

### Asymptotische Entwicklung

► Def.: Die Summe  $\sum_{n=1}^N f_n(\epsilon)$  heißt asymptotische Entwicklung für  $\epsilon \rightarrow 0$ , wenn

$$\frac{f(\epsilon) - \sum_{n=1}^N f_n(\epsilon)}{f_N(\epsilon)} \rightarrow 0 \quad \text{d.h. Die Abweichung vom der wahren Fkt. } f \text{ ist als der letzte Term der Entwicklung.}$$

üblicherweise Entwicklung in Potenzreihe

$$f(\epsilon) \approx \sum_{n=1}^N a_n \epsilon^n \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad \left( \begin{array}{l} \text{z.B.} \\ f(\epsilon) \hat{=} E \\ a_1 \hat{=} E_1 \\ a_2 \hat{=} E_2 \end{array} \right)$$

Für Lasergleichung in der Nähe der Schwelle:  $P-1$  klein

Ansatz für Lasergleichung

$$E^{(\epsilon)} = \epsilon E_1^{(\epsilon)} + \epsilon^2 E_2^{(\epsilon)} + \epsilon^3 E_3^{(\epsilon)} + \dots$$

$$D = 1 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \epsilon^3 D_3 + \dots$$

(ungestörtes Problem,  $\epsilon=0$  heißt  $P=1 \rightarrow E=0, D=1$ )

kleiner Parameter  $P-1 = \epsilon p_1 + p_2 \epsilon^2 + \dots$

Zeitabhängigkeit? 1. Möglichkeit  $E_1(t), E_2(t), E_3(t), D_1(t), \dots$

$\rightarrow$  ergibt keine entkoppelte Gleichungen

2. Möglichkeit: Vielzeitemansatz  $\hat{=}$  Zeitskalen als unabhängige Variablen

$$\tau_1 = \epsilon t \quad \text{"langsam"}$$

$$\tau_2 = \epsilon^2 t \quad \text{"noch langsamer"}$$

⋮

$$\tau_n = \epsilon^n t$$

$$\Rightarrow E(t) = E(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$$

Kettenregel beim Ableiten

$$\frac{dE}{dt} = \epsilon \frac{\partial E}{\partial \tau_1} + \epsilon^2 \frac{\partial E}{\partial \tau_2} + \epsilon^3 \frac{\partial E}{\partial \tau_3} + \dots$$

$$E_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots)$$

$$E_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots)$$

$$D_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots)$$