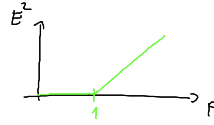


4.3. Grenzfälle der Lasergleichungen

(I) $\dot{E} = \frac{1}{2} E(D - 1)$

(II) $\dot{D} = \gamma(P - D(1 + E^2))$



1. Fall

γ groß, $\gamma \gg 1$

→ adiabatisches Eliminieren der schnellen Dynamik, d.h. $\dot{D} = 0$

$\dot{E} = \frac{1}{2} E \left(\frac{P}{1+E^2} - 1 \right)$

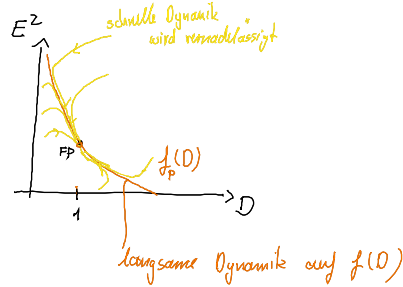
wobei statische Zusammenhang zwischen D und E gilt

$D = \frac{P}{1+E^2}$
 $\hookrightarrow E^2 = \frac{P}{D} - 1$

class A Laser

• Dynamik im effektiv 1-dim Phasenraum

(nur gültig für $t > \frac{1}{\gamma}$)



- Fixpunkte: ① $E = 0$
 ② $E^2 + 1 = P$

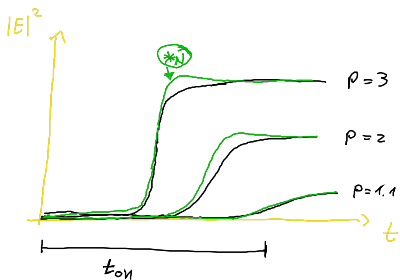
Stabilität: $DF = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{1+E^2} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-2E^2 P}{(1+E^2)^2} \right)$

$DF_{\text{②}} = -\frac{E^2}{P} = -\frac{P-1}{P}$

→ $\lambda_1 = -\frac{P-1}{P}$ stabil für $P > 1$

• nur noch Zeitskala, die über λ_1 bestimmt ist, im System.

→ kritische Verlangsamung an der Schwelle $P=1$



class A Laser
 (Abweichung von Normalform für $P > 1$)

Bemerkung:

Normalform an der Schwelle

$\textcircled{*N} \dot{E} = \frac{1}{2} E(P - 1 - E^2) + \sigma(E^2)$
 $E^2 = P - 1$

*A für kleine E^2 :

$\dot{E} = \frac{1}{2} E(P(1 - E^2) - 1)$

2. Fall

γ klein, d.h. Elektronen leben länger als Photonen

$\gamma = \frac{\tau_{ph}}{\tau_{el}}$

Problem: $\dot{D} = 0$ setzen liefert keine physikalische sinnvolle Lösung

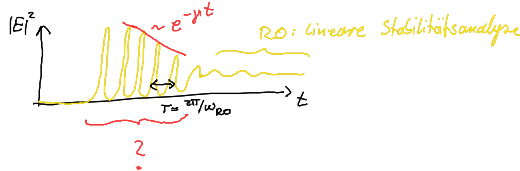
$$E = \frac{1}{2} E(0(\omega) - 1)$$

$$\rightarrow E \rightarrow 0 \text{ oder } E \rightarrow \infty \quad \downarrow$$

$\mu \rightarrow 0$ ist ein singularer Grenzfall

Lösung: Realisieren der Gleichungen damit μ nicht mehr die rechte Seite multipliziert (siehe Ü11)

Ansatz: motiviert aus Numerik



$$s = \sigma t$$

$$I = P - 1 + \alpha y$$

$$D = 1 + \beta x$$

neue Größen: s, y, X

$x, y \hat{=}$ Abweichung vom Fixpunkt, skaliert

• Diese Variablen sollen Gleichungen soweit ändern, dass Grenzfall $\mu \rightarrow 0$ möglich wird

Ergebnis

$$\begin{cases} \dot{y} = (1+y)x & \text{(III)} \\ \dot{x} = -y - \sqrt{\frac{y}{P-1}} x (P - (P-1)y) & \text{(IV)} \end{cases}$$

äquivalent zu (I), (II)

$$\text{mit } I = (P-1)(1+y)$$

$$D = 1 + \omega_{R0} x$$

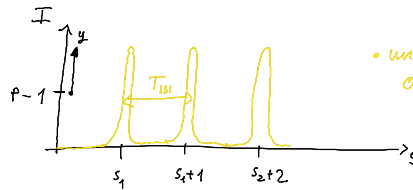
$$s = \omega_{R0} t$$

$$\omega_{R0} = \sqrt{P-1}$$

Erneut Versuch des Grenzfalls $\mu \rightarrow 0$ von (III), (IV)

$$\begin{cases} \dot{y} = (1+y)x \\ \dot{x} = -y \end{cases}$$

$\ddot{x} = x\dot{x} - x$ \rightarrow nichtlinearer Oszillator



• ungedämpfte Oszillation

T_{ISI} : Inter-Spike-Intervall

System ist konservativ (für $\mu \rightarrow 0$)

• Erhaltungsgröße $C = \frac{x^2}{2} + y - \ln(1+y)$

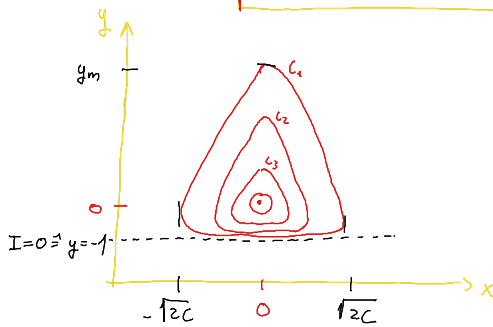
da $\vec{F} \cdot \nabla_x C = 0$ erfüllt ist.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ (1+y)x \end{pmatrix}$$

$$\nabla_x C = \begin{pmatrix} x \\ 1 - \frac{1}{1+y} \end{pmatrix}$$

das heißt durch C ist $x(y)$ bekannt

$$x(y) = \pm \sqrt{2(C - y + \ln(1+y))}$$



Lösung im Phasenraum
(Zeitentwicklung noch nicht bekannt)

- zu jedem C gibt es eine Trajektorie $x(y)$ im Phasenraum
- C gegeben durch $A \cdot B$

Umlaufpunkte: $\frac{dx}{dy} \stackrel{!}{=} 0$

$$= \frac{\frac{1}{1+y^*} - 1}{2\sqrt{C - y^* + \ln(1+y^*)}}$$

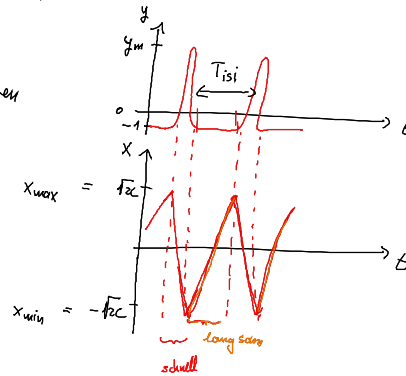
$$\rightarrow y^* = 0$$

$$x^* = \pm \sqrt{2C}$$

Maximale Intensität: angewandte LU
 $x = 0$

$$\ln(1+y) < y \rightarrow y_m \approx C$$

Zeitentwicklung: $y > -1$: Puls
 $y < -1$: zwischen den Pulsen



Interspike Intervall T_{isi}

Zeit zwischen Pulsen, während $y < -1$

DGL $\dot{x} = 1$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} dx = \int_t^{t+T_{isi}} dt$$

$$2\sqrt{2C} = T_{isi}$$

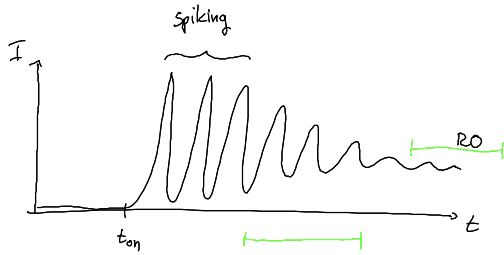
- Periode der Pulse hängt von C (Startwert) ab
größere Pulse \rightarrow größeres T_{isi}

$$y_m \approx \frac{T_{isi}^2}{8}$$

kann in Experimenten bestätigt werden!

Periode und Intensität sind konstant. Anders als bei RO!

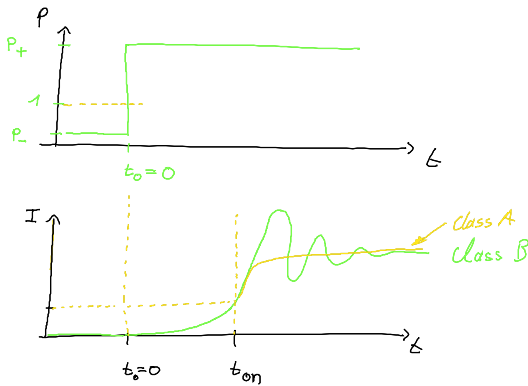
$$\left[\omega_{RO} = \sqrt{\mu(P-1)} \right]$$



↳ um Ableitungen der Spikes zu beschreiben muss Term mit $\mu \sqrt{\mu(P-1)}$ wieder mitgenommen werden.

4.4. Anschaltverzögerung (Turn-on delay t_{on})

Frage: Wie lange dauert es bis nach Anschalten Licht im Resonator ist?



$$(I) \quad \dot{I} = I(D-1)$$

$$(II) \quad \dot{D} = \mu(P_+ - D) - \mu D I$$

Ansatz: Suchen Punkt an dem I von "klein" auf "groß" wechselt.

während der Zeit t_{on} zu vernachlässigen

Lösung: Anfangsbedingungen

$$I(0) = I_0 \ll 1$$

$$D(0) = P_-$$

$$(II): D = (P_- - P_+) e^{-\mu t} + P_+$$

$$\text{Einsetzen in (I): } \dot{I} = I \left((P_- - P_+) e^{-\mu t} + P_+ - 1 \right)$$

$$\text{Ansatz: } I = I_0 e^{\frac{1}{\mu} F(\mu t)}$$

← exakte Lösung für I & D

$$F(\mu t) = (P_+ - 1)\mu t - (P_- - P_+) \left[e^{-\mu t} - 1 \right]$$

Vorzeichenwechsel von $F(\mu t)$ liefert Wechsel in Größenordnung von I

$$F < 0 \rightarrow I \text{ von } \sigma(e^{-1/\mu})$$

$$F > 0 \rightarrow I \text{ von } \sigma(e^{1/\mu})$$

$\Rightarrow t_{on}$ definiert durch $F(\mu t) = 0$

$F(\mu t)$ ist transzendent, mögliche Näherung:

$$\underbrace{\mu t^{on}}_{\substack{\text{dimensionslos} \\ \text{gro\ss}}} \approx \frac{\tau_{ph}}{\tau_1} \frac{t_{on}^{dim}}{\tau_{ph}} = \frac{t_{on}^{dim}}{\tau_1} \gg 1$$

d.h. mit Dimensionen

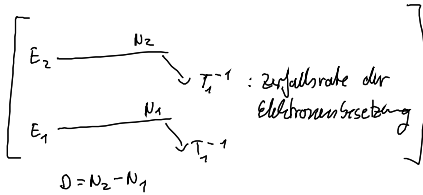
\Rightarrow

$$\frac{1}{\mu} F(\mu t) \approx (P_+ - 1)t_0 + \frac{1}{\mu} (P_- - P_+) = 0$$

$$t_{on} \approx \frac{P_+ - P_-}{\mu(P_+ - 1)}$$

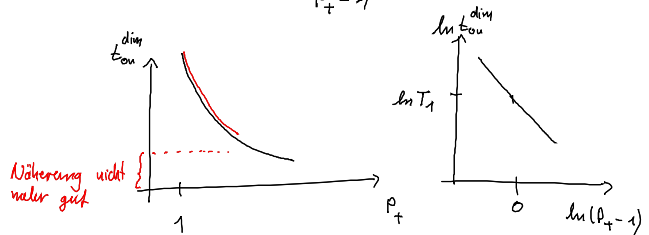
falls $(P_+ - 1)$ klein aber $P_+ > 1$, $P_- = 0$

$$t_{on} \approx \frac{1}{\mu} \frac{1}{P_+ - 1}$$



\rightarrow mit Dimensionen

$$t_{on}^{dim} = T_1 \frac{1}{P_+ - 1}$$



Bestimmung der Elektronenlebensdauer möglich!

Bem: Für komplexe Lasergleichungen wird ein effektives T_1 gemessen.