Fortsetzung 3.2. Stochastische DGL

Bsp.: 2 1-dim.
$b = const.$
$a(x) = a \cdot x \quad a < 0$
lineare SDE

$$dx = a(x)\,dt + \overbrace{b\,dW}^{\text{Inhomogenität}}$$

$x(t)$: Zufallsvariable (Pfad)

dW: Wiener Increment
$dW = \xi(t)dt$

Mittelwert: $\langle x \rangle = 0$

Varianz: $\sigma^2 = \Psi(0) = \langle x(t)\,x(t) \rangle$

$$\Psi(s) = \langle x(t)x(t+s) \rangle$$

Autokorrelationsfunktion

$\vdots$

schon bekannt
$x(t) = x^H(t)\cdot x_0 + x^H(t)\cdot c(t)$
$c(t) = \int_{t_0}^{t} b\,\xi(s)\,x^{H^{-1}}(s)\,ds$

$$= \left\langle b^2 \int_0^t \int_0^{t+s} \xi(t')\,\xi(t'')\,e^{-at'} e^{-at''} dt'dt'' e^{2at+as} \right\rangle$$

Gauß'sches Rauschen
$\delta(t'-t'') = \langle \xi(t')\xi(t'') \rangle$

vertausche $\int$ und $\langle\,\rangle$

$$= b^2 \int_0^t e^{-2at'} dt' \cdot e^{2at+as}$$

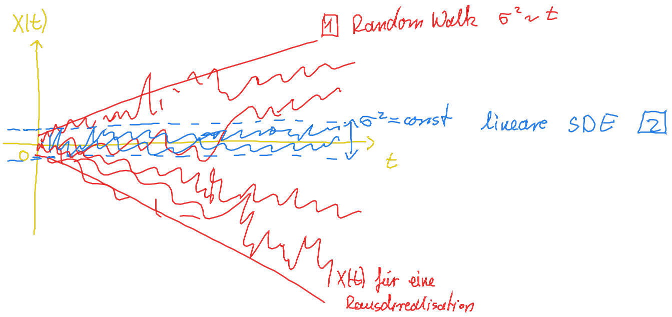
$$= b^2 \left[\frac{1}{-2a} e^{-2at'} \right]_0^t e^{2at+as}$$

$$= \frac{b^2}{-2a} \left[e^{-2at} - 1 \right] e^{2at+as}$$

$$= \frac{b^2}{-2a} e^{as} \underbrace{- \frac{b^2}{-2a} e^{2at+as}}_{\to 0 \text{ für } t\to\infty \text{ (und } a<0)}$$

$$\boxed{\Psi(s) = \frac{b^2}{-2a} e^{as}}$$

d.h. Varianz $\Psi(0) = \sigma^2 = \dfrac{b^2}{-2a}$



<u>Interpretation:</u> Bei SDE der Form $dx = a \cdot x\,dt + b\,dW$ hat die Varianz eine Reziproke Abhängigkeit von a (d.h. vom Eigenwert)
starke Dämpfung → kleine Varianz

<u>Bem:</u> Sobald Rauschen betrachtet wird, <u>muss</u> Zeit diskret betrachtet werden
d.h. $\int_0^t F(t')\,dt' \longrightarrow \sum_{t'=0}^{t} F_{t'}$

[d.h. $c(t) = \sum_{t'=t_0}^{t} b\,dW_t\ x_t^{H*}$

$\int dW \int dW = \sum_t dW_t \sum_{t'} dW_{t'} \hat{=} \sum_t$

$\langle (dW_1 + dW_2 \cdots)(dW_{1'} + dW_{2'} \cdots) \rangle$]

Beispiel $\boxed{3}$: mehrdimensionale lineare SDE

$$d\underline{X}_t = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{X}_t + \underline{\underline{B}}\,d\underline{W}$$

$d\underline{W}$: mehrdimensionaler Wiener Prozess
$X_t \in \mathbb{R}^d$

(gleiches Vorgehen wie 1-dim)

Fundamentalsystem der homogenen DGL

$$\underline{\underline{\phi}}(t) = e^{\int_0^t \underline{\underline{A}}(s)\,ds} = \left(e^{\lambda_1 t} \underline{V}_1,\ e^{\lambda_2 t} \underline{V}_2, \dots\ e^{\lambda_n t} \underline{V}_n \right)$$

eine Spalte der Matrix ist eine Eigenlösung ($\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n$ sind Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}$)

<u>Allgemeine Lösung</u>

$$\underline{X}_t = \underline{\underline{\phi}}(t) \cdot \underline{X}_0 + \underline{\underline{\phi}}(t) \underbrace{\int_0^t \underline{\underline{\phi}}^{-1}(s)\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\xi}\,ds}_{\underline{c}(t)}$$

Anfangsbedingungen

$\left[1D: \int_0^t b\,\xi\ x_H^*(s)\,ds \right]$

$\underline{\underline{\phi}}^{-1}$ Lösung von $-\dot{\underline{X}}_t^* = \underline{\underline{A}}^* \underline{X}_t^*$

wobei $\langle \underline{\underline{A}}\underline{X}, \underline{Y}^* \rangle = \langle \underline{X}, \underline{\underline{A}}^* \underline{Y}^* \rangle$

<u>Mittelwert</u> : $\langle \underline{X}_t \rangle = 0$ (analog zur 1D Argumentation)

<u>Ko-Varianz-Matrix</u> : $\underline{\underline{\sigma}}^2 = \langle \underline{X}_t \otimes \underline{X}_t^T \rangle$

(dxd) Matrix, wobei Varianzen der einzelnen Komponenten auf der Diagonalen stehen.

Bsp. $\underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{\sigma}}^2 = \begin{pmatrix} \langle x \cdot x \rangle & \langle x y \rangle \\ \langle y x \rangle & \langle y y \rangle \end{pmatrix}$

$$(t \to \infty) = \underline{\underline{\phi}}(t) \int_0^t \left[\underline{\underline{\phi}}^{-1}(s) \underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{\phi}}^{-1}(s)^T \right] ds \cdot \underline{\underline{\phi}}^T(t)$$

$$\otimes \quad \boxed{\underline{\underline{\sigma}}^2 = \int_0^t e^{\underline{\underline{A}}(t-t')} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}}^T e^{\underline{\underline{A}}^T (t-t')} dt'}$$

<u>Vorteil</u>: Zur Berechnung der Varianz muss SDE <u>nicht</u> integriert werden.
$\Rightarrow$ spart Rechenaufwand

<u>Anwendung</u>:
- Linienbreite im Laser kann aus Varianz der Phase des E-Feldes berechnet werden

siehe ÜS, A10

- jedes nichtlineare System kann linearisiert auch mit $\otimes$ beschrieben werden

3.3. Regularität von stochastischer Dynamik

- Definiere Maß für Regularität

<u>Korrelationszeit</u> $t_{cor} = \dfrac{1}{\Psi(0)} \displaystyle\int_0^\infty |\Psi(s)| \, ds$

Autokorrelationsfunktion von $X(t)$ ist $\Psi(s) = \langle X(t) X(t+s) \rangle$

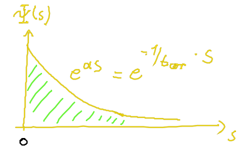
$\langle X \rangle = 0$.

Beispiel der linearen SDE $dx = a x\, dt + D\, dW$

Rauschstärke D (vorher b)

① für a reell

$\Psi(s) = \frac{D^2}{-2a} e^{as} \Rightarrow t_{cor} = \int_0^\infty |e^{as}|\, ds = \frac{1}{a}\left[e^{as}\right]_0^\infty = -\frac{1}{a}$



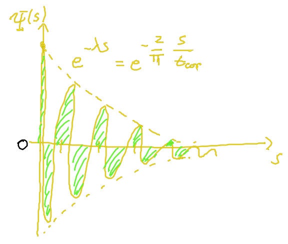
② für a komplex

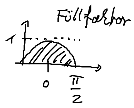
$a = -(\lambda + i\omega_0)$

$\Psi(s) = \mathrm{Re}\left[\frac{D^2}{-2a} e^{as}\right]$

$t_{cor} = \int_0^\infty e^{-\lambda s} |\cos \omega_0 s|\, ds$

(falls $\lambda \ll \omega_0$) $\approx \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, ds = \frac{2}{\pi \lambda}$

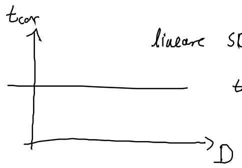




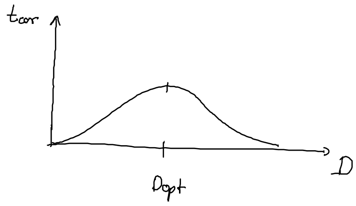
$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi\, d\phi = \frac{2}{\pi}$

exponentiell abklingende Korrelation auf der Zeitskala t_{cor}.

Für linearen Prozess hängt t_{cor} nicht von Rauschstärke ab!



③ Nichtlineares System: t_{cor} kann von Rauschstärke abhängen



Kohärenzresonanz: tritt auf bei anregbaren Systemen

z.B. • Neuronen → siehe Übung

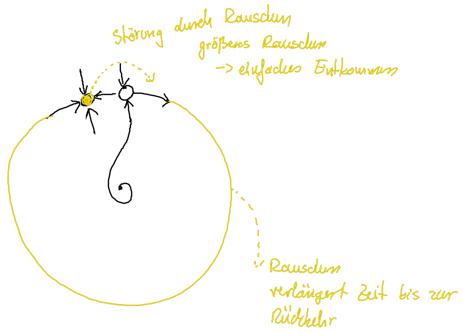
• Laser mit optischer Injektion

↳ in der Nähe einer SNIPER Bifurkation

Begründung: 2 Zeitskalen, die unterschiedlich die Regularität beeinflussen

z.B. Aktivierungszeit $T_{act}(D) \searrow$ t_{cor} besser mit D

Exkursionszeit $T_{exc}(D) \nearrow$ t_{cor} schlechter mit D



Frage: Wie wirkt Rückkopplungskontrolle auf rauschinduzierte Oszillationen?

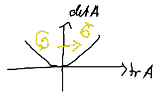
Am Beispiel: Van der Pol Oszillator

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = (\varepsilon - x^2)\, y - \omega_0^2 x \quad + K\,[\,y(t-\tau) - y(t)\,] \;+\; D\,\xi(t)$$

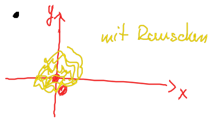
- für $D=0, K=0$: Fixpunkt $x=y=0$, $\quad \underline{\underline{A}} = DF|_{FP} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$ $\qquad \mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} = \varepsilon$, $\det \underline{\underline{A}} = \omega_0^2$

  $\varepsilon < 0$ Fixpunkt stabil

  $\rightarrow$ bei $\varepsilon = 0$

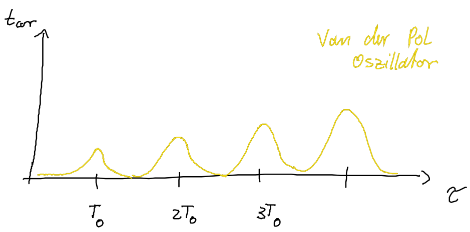
  

  ist Hopf-Bifurkation
  $\varepsilon < 0$: stab. Fokus
  $\varepsilon > 0$: instab. Fokus

- 

  mit Rauschen $D \neq 0$

- mit Kontrolle $D \neq 0$, $K \neq 0$



Verstärkung der Kohärenz durch Delay für geeignete Periode $T_0 \cdot n = \tau$.