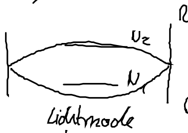
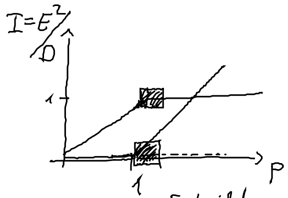
Fortsetzung: 4.2. Normalform der Laserratengleichung (nahe der Schwelle)

Laser-Ratengleichungen (dimensionslos, mit Feldamplitude formuliert)

- Feld im Resonator (I) $\dot{E} = \frac{1}{2} E\,(D-1)$
- Besetzungsinversion (II) $\dot{D} = \gamma\,(P - D(1+E^2))$



γ: Verhältnis der Lebensdauern von Elektronen + Photonen



Entwicklung von (I) & (II) für $P-1$ klein (aber positiv)

Potenzreihenansatz:

$$E = \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 + \ldots$$
$$D = 1 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2$$
$$(P-1) = \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \ldots$$

Vielzeitenansatz:

$$\tau_1 = \varepsilon t$$
$$\tau_2 = \varepsilon^2 t$$
$$\vdots$$
$$\tau_n = \varepsilon^n t$$

Einsetzen in (I) & (II)

zunächst rechte Seite

$$\dot{E} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2\right)\left(\varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2\right) + \sigma(\varepsilon^4)$$
$$\dot{D} = \gamma\left[1 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 - (1 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \varepsilon^3 D_3)\left(1 + \varepsilon^2 E_1^2 + 2E_1E_2\,\varepsilon^3\right)\right] + \sigma(\varepsilon^4)$$

dann linke Seite

$$\dot{E} = \frac{dE(\tau_1,\tau_2,\ldots)}{dt} = \underset{\downarrow\ \frac{\partial \tau_1}{\partial t}}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \tau_1}(\varepsilon E_1) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial \tau_1}(\varepsilon^2 E_2) + \underset{\downarrow\ \frac{\partial \tau_2}{\partial t}}{\varepsilon^2}\frac{\partial}{\partial \tau_2}(\varepsilon E_1) + \sigma(\varepsilon^4)$$

$$\dot{D} = \frac{dD(\tau_1,\tau_2\ldots)}{dt} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial \tau_1}(\varepsilon D_1) + \varepsilon^3\left[\frac{\partial}{\partial \tau_1} D_2 + \frac{\partial}{\partial \tau_2} D_1\right] + \sigma(\varepsilon^4)$$

Sortieren nach Ordnungen von ε:

Koeffizientenvergleich

$O(\varepsilon)$ $\quad 0 = p_1 - D_1 \quad$ (a)

$\sigma(\varepsilon^2)$ $\quad \frac{\partial E_1}{\partial \tau_1} = \frac{1}{2} E_1 D_1 \quad$ (b)

$\quad \frac{\partial D_1}{\partial \tau_1} = \gamma\left(p_2 - D_2 - E_1^2\right) \quad$ (c)

$$\mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad \frac{\partial E_2}{\partial \tau_1} + \frac{\partial E_1}{\partial \tau_2} = \frac{1}{2}\left(E_2 D_1 + E_1 D_2\right) \qquad (d)$$

Iteratives Lösen der Gleichungen (a) – (d)

- $\mathcal{O}(\varepsilon)$ $\quad D_1 = p_1 \xrightarrow{\text{in (b)}} \frac{\partial E_1}{\partial \tau_1} = \frac{1}{2} p_1 E_1$

$$E_1 = E_1(0)\, e^{\frac{1}{2} p_1 \tau_1}$$

Problem: unbeschränkt oder Null für $p_1 \neq 0$ $\downarrow$ zur Lösung der vollen Gleichg

$p-1 = \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \ldots > 0$

$\Rightarrow p_1 = 0 = D_1$

$\Rightarrow \frac{\partial E_1}{\partial \tau_1} = 0 \qquad E_1$ nicht abhängig von τ_1 !

- (c) : $D_2 = p_2 - E_1^2 \qquad$ da $D_1 = 0$

hängt nicht von τ_1 ab

$\Rightarrow D_2$ kann damit auch nicht von τ_1 abhängen

- (d) : $\frac{\partial E_2}{\partial \tau_1} = \underbrace{-\frac{\partial E_1}{\partial \tau_2} + \frac{1}{2} E_1 D_2}_{\text{nicht von } \tau_1 \text{ abhängig}} + (E_2 \cancel{D_1}^{0})$

$= \text{const} \longrightarrow E_2$ unbeschränkt falls const $\neq 0$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial E_1}{\partial \tau_2} = \frac{1}{2} E_1 D_2 \overset{(c)}{=} \frac{1}{2} E_1 \left(p_2 - E_1^2\right)} \quad (*)$$

DGL für $E_1(\tau_2)$

$p - 1 = \varepsilon \cancel{p_1}^{p_1=0} + \varepsilon^2 p_2 + 0 \qquad$ oBdA : $p_2 = 1$, $p_j = 0$ $(j \geq 3)$

$\rightarrow \quad \varepsilon = \sqrt{p-1}$

$\boxed{\text{Rücktransformation:}}$

Wir wissen: $\quad D_1 = 0,\ p_1 = 0,\ \frac{\partial E_2}{\partial \tau_1} = \frac{\partial E_1}{\partial \tau_1} = 0$

d.h.

$$\dot{E} = \varepsilon \underbrace{\frac{\partial}{\partial \tau_1}(\varepsilon E_1)}_{=0} + \varepsilon^3 \Big[\underbrace{\frac{\partial E_2}{\partial \tau_1}}_{=0} + \frac{\partial E_1}{\partial \tau_2} \Big] + \ldots \quad \overset{(*)}{\Rightarrow} \quad \dot{E} = \varepsilon^3 \frac{\partial E_1}{\partial \tau_2} + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

$$E = \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2$$

$$\rightarrow \varepsilon E_1 = E - \sigma(\varepsilon^2) \quad (*_3)$$

$$\dot{E} \overset{(*_1)+(*)}{=} \varepsilon^3 \left(\frac{1}{2} E_1 (1 - E_1^2) \right) \overset{(*_3)}{=} \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2} E^2 + \sigma(\varepsilon^3) \right)$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} E \left(\varepsilon^2 - E^2 \right) + \sigma(\varepsilon^4)}$$

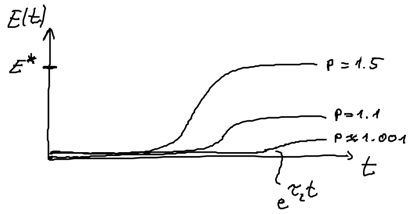
mit $\varepsilon^2 = (p-1)$

Normalform der Laserbifurkation an der Schwelle

Stimmgabel-Bifurkation $\left[\underset{\text{superkritisch}}{\dot{x} = \mu x - x^3} \right]$
als Funktion von P

Bem: • Koeffizientenvergleich $\sigma(\varepsilon^4)$ liefert DGL für Inversion $\dot{D} = \gamma (D-1)(P-D) + \sigma(\varepsilon^5)$
(Transkritische Bifurkation)

• Normalform ergibt Lösung des DGL-Systems nicht nur in der Nähe des FP aber nur nahe der Schwelle

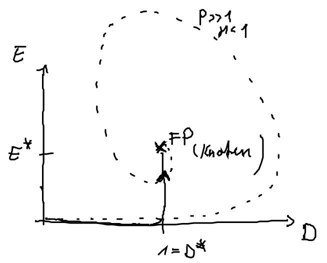


$P = 1$: kritische Verlangsamung

$\tau_2 = \varepsilon^2 t = (P-1) \cdot t$

τ_2 wird beliebig langsam für $\varepsilon \rightarrow 0$

▶ Nichtgleichgewichts-Phasenübergang 2. Ordnung



Gültigkeitsgrenzen der Amplitudengleichung?

- beim Ansatz der Vielzeitenasymptotik wurde keine Zeitskala schneller als εt betrachtet aber aus linearen Stabilitätsanalyse für $P-1$ klein kam:

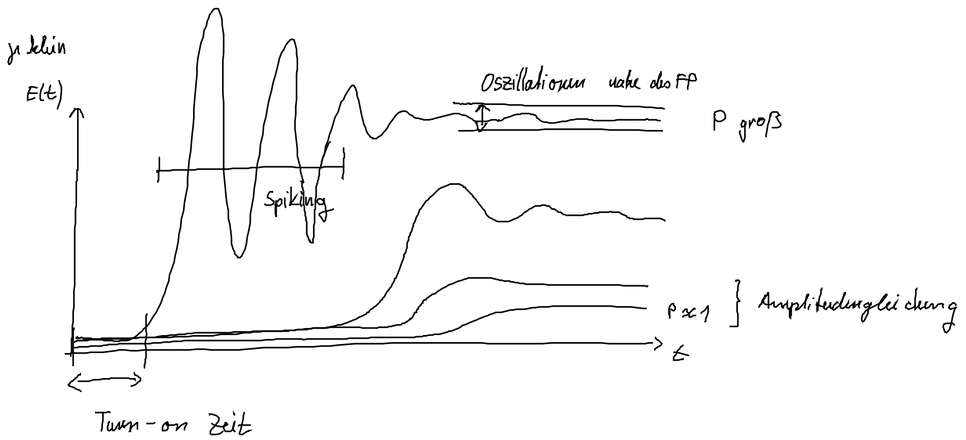
$$\lambda_1 = -\gamma P + \frac{P-1}{P}$$
$$\lambda_2 = -\frac{P-1}{P}$$

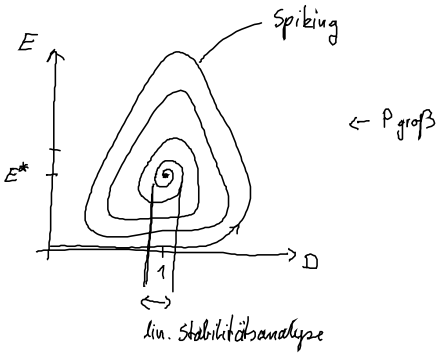
das ist OK wenn γP nur schnellen exp. Abfall liefert.
Problem, wenn γP klein! $\Rightarrow$ nur gültig für $\boxed{|P-1| << \gamma}$

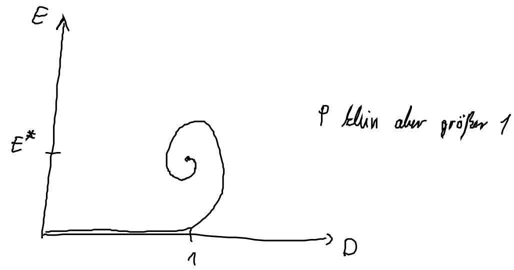
- für $\mu = 10^{-3}$ (class B Laser) lässt dies nur einen kleinen Gültigkeitsbereich zu
- μ groß $\to$ kann P groß gewählt werden

<u>Grenzfall</u> $\mu \to 0$

- lineare Stabilitätsanalyse für festes P (nahe am FP) $\to$ 4.1.
- $|P-1| \ll \mu$ Amplitudengleichung aus 4.2.
- P fest + weit weg vom FP $\gtrsim$ 4.3 und Übung A11







4.3. Grenzfälle der Lasergleichungen

4.3.1. γ groß

(I) $\dot{E} = \frac{1}{2} E (D-1)$

(II) $\dot{D} = \gamma (P - D(1+E^2))$

· Adiabatisches Eliminieren

"Versklavungsprinzip"

wenn γ groß $\rightarrow$ D ändert sich schnell und ist dann konstant

$\rightarrow$ D kann instantan (adiabatisch) den Änderungen von E folgen

setze $\dot{D} = 0$ (gültig nach $t > \frac{1}{\gamma}$)

II : $D(1+E^2) = P \rightarrow \underline{D(t) = \frac{P}{1+E(t)^2}}$

statischer Zusammenhang

D ändert sich über E zeitlich

einsetzen in (I)

$$\boxed{\dot{E} = \frac{1}{2} E \left(\frac{P}{1+E^2} - 1 \right) \qquad \text{Class A Laser}}$$