

Zusammenfassung - Delay Systeme

- Phasenraum hochdimensional
- charakteristische Gleichung *transcendent* \rightarrow Lösung über
 - ① Lambert W-Funktion
 - ② numerisch
 - ③ analytische Lösung entlang bestimmter Bifurkationskurven (z.B. Hopf-Kurve $\lambda = i\omega$)
- Stabilisierung
 - ① von instab. Fokus (durch Pyragas Kontrolle) : $\tau = \frac{T_0}{2} + nT_0$ $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$
es existiert minimale Rückkopplungsstärke für Stabilisierung
 - ② von Grenzzyklen : $\tau = T_0$
Stabilisierung durch transkritische Bifurkation
- Reappearance ; "Wiederauftauchen" von ^{periodischen} Lösungen der ODE bei Vielfachem der Periode + Delay : d.h. bei $\tau_n = \tau_0 + nT_0$ $n \in \mathbb{N}$
 \uparrow
 Periode der Lösung gefunden bei τ_0
 . finde identische Lösung (mit T_0) bei τ_n (Stabilität kann wechseln)

3. Stochastische dynamische Systeme

Bisher : deterministische dynamische Systeme (durch AB eindeutig für alle t bestimmt)
 jetzt : stochastische (zufällige) Prozesse

3.1. Stochastische Prozesse

Zeitentwicklung einer Zufallsvariablen $X(t)$
 (\leftrightarrow im thermodynamischen Gleichgewicht zeitunabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Jayne'sches Prinzip der vorurteilsfreien Schätzung gegeben)

Verbandwahrscheinlichkeit zeitabhängig : $p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots)$
 x_1, x_2, x_3 Realisierungen von $X(t)$

Markoff - Prozess

$$p(x_1, t_1 | \underbrace{x_2, t_2, x_3, t_3, \dots}_{\text{Historie}}) := \frac{p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots)}{p(x_2, t_2) p(x_3, t_3) \dots}$$

bedingte Wahrscheinl.

$\stackrel{!}{=} p(x_1, t_1 | x_2, t_2)$ hängt nur vom letzten Schritt ab

$t_1 > t_2 > t_3 \dots$ kein Gedächtnis!

Langevin-Gleichung

fluktuierende stochastische Kraft $\xi(t) \hat{=} \text{Rauschen}$

z.B. Brown'sche Bewegung (1827)

$$m\ddot{x} = -\underbrace{\eta \dot{x}}_{\text{Reibung}} + \underbrace{\xi(t)}_{\text{Rauschen}}$$

Gauß'sches weißes Rauschen

$\langle \dots \rangle = \text{statistische Mittelung}$

$\langle \xi(t) \rangle = 0$

$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t-t')$ unkorreliert

[zentraler Grenzwertsatz: unkorrelierte Zufallsvar. gehorchen einer Gauß-Verteilung]

Autokorrelationsfunktion

$\chi(s) := \langle (x(t) - \langle x \rangle) (x(t+s) - \langle x \rangle) \rangle$

ergodische Systeme: Ensemblemittel = Zeitmittel

$\chi(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt x(t) x(t+s)$ (hier $\langle x \rangle = 0$)

Fourier-Transform: $\hat{x}(\omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T dt e^{i\omega t} x(t)$ in $t \in [-T, T]$

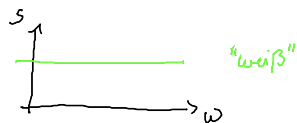
Spektrale Leistungsdichte (power-spectral density)

$S(\omega) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\hat{x}(\omega, T)|^2$

oder $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t) x(t+s) \rangle e^{i\omega s} ds$

Wiener-Khinchin-Theorem

z.B. Anwendung auf Gauß'sches Rauschen $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) e^{i\omega s} ds = \frac{1}{2\pi} = \text{const}$



3.2. Stochastische Differentialgleichungen (SDE)

Gegeben sei ein dynamisches System mit Rauschen

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t) + b(x, t) \xi(t)$$

$\xi(t)$: Gauß'sches weißes Rauschen

Problem: - durch Rauschen sind Trajektorien $x(t)$ nicht mehr differenzierbar

- $x(t)$ ist Zufallsvariable

→ $\frac{dx}{dt}$ nicht wohldefiniert

⇒ Umschreiben in Differentialoperatoren

$$\boxed{\text{SDE}} \quad dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW(t)$$

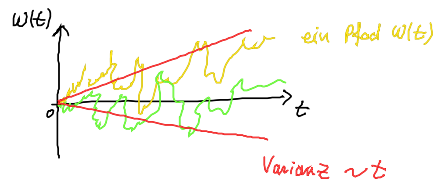
woher $dW(t) = \xi(t)dt$

kann formal integriert werden

↑
"Wiener Prozess" mit

$$\text{Pfad } W(t) = \int_0^t \xi(t') dt'$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t dt' a(x, t') + \int_{t_0}^t dW(t') b(x, t')$$



Bem: keine explizite Lösung, da $a(x, t)$ von x abhängt

→ keine analytische Lösung möglich

ABER: Mittelwerte und Varianz können berechnet werden!

$$\text{Varianz: } \langle (x(t) - \langle x \rangle) (x(t) - \langle x \rangle) \rangle = \Psi(0) = \sigma_x^2$$

am Bspiel eines 1-dim Systems $x \in \mathbb{R}$: sei $a = 0$
 $b = \text{const}$ d.h. reiner Wiener Prozess (Random Walk)

$$\text{Mittelwert: } \langle x \rangle = \left\langle b \int_{t_0}^t dW(t') \right\rangle$$

$$= \left\langle b \int_{t_0}^t \xi(t') dt' \right\rangle = 0 \quad (\text{da Gauß'sches Rauschen})$$

↑ $\langle \xi(t) \rangle = 0$

$$\text{Varianz } \langle x(t)x(t) \rangle = \left\langle b^2 \int_{t_0}^t dW(t') \cdot \int_{t_0}^t dW(t'') \right\rangle$$

$$\delta(t-t) = \langle \xi(t)\xi(t') \rangle \Rightarrow = b^2 \int_{t_0}^t dt' = \boxed{b^2(t - t_0)}$$

Varianz steigt linear mit zeitlicher Abweichung vom Startwert

2) : 1-dim
 $b = \text{const}$
 $a(x) = a \cdot x$ d.h. lineare stochastische DGL

$\Rightarrow dx = a \cdot x dt + \underbrace{b dW}_{\text{inhomogenität der DGL}}$

1) homogene Lösung finden zu $\dot{x} = a x$
 Fundamentalsystem $x^H(t) = e^{at}$

2) Ansatz für inhomogene Lösung zu $\dot{x} = a x + b f$

$x^I = c(t) x^H$ (Variation der Konstanten)

einsetzen in DGL:

$\dot{c} x^H + c \dot{x}^H = a c x^H + b f$
 $\dot{c} x^H + c \cdot a x^H = a c x^H + b f$

(1) $\dot{c} x^H = b f$

Nebenrechnung

Suchen $x^H x^{H*} = 1$

x^{H*} ist eine Lösung zur adjungierten DGL

$-\dot{x}^* = a^* x^*$

hier $x^{H*} = e^{-at}$

(1) $\Rightarrow \dot{c} = b f x^{H*}$

$\rightarrow c(t) = \int_{t_0}^t b f(s) x^{H*}(s) ds$

für $x^I = c(t) x^H$

allgemeine Lösung von SDE $dx = a x dt + b dW$ ist

$x(t) = \underbrace{x^H(t)}_{AB} \cdot x_0 + x^H(t) \cdot c(t)$

stochastische Zufallsvariable

• Mittelwert von $x(t)$: $\langle x \rangle = \langle x_0 \cdot x^H \rangle + \langle c(t) x^H \rangle$
 $= e^{at} (\langle x_0 \rangle + \langle c(t) \rangle)$
 $= e^{at} (\langle x_0 \rangle + \langle \int_0^t b f(t') e^{-at'} dt' \rangle)$
 \downarrow geht gegen Null für $t \rightarrow \infty, (a < 0)$

$$\underline{\underline{= 0}} \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

• Varianz von $x(t)$: $\langle x(t)x(t) \rangle = \mathcal{F}(0)$

x_0 : Startwert
 $x(t_0) = x(0)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(s) &= \langle x(t)x(t+s) \rangle \\ &= \langle (x_0 e^{at} + c(t)e^{at}) (x_0 e^{a(t+s)} + c(t+s)e^{a(t+s)}) \rangle \\ &= \underbrace{\langle x_0^2 e^{2at+as} \rangle}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{mit } e^{2at}}} + \underbrace{\langle 2c(t)(e^{2at+as} x_0) \rangle}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{mit } e^{2at}}} + \langle c(t)c(t+s)e^{2at+as} \rangle \end{aligned}$$

↓
weiter am Mo!

$$\mathcal{F}(s) = \frac{b^2}{-2a} e^{as}$$