

## 1.2.3 Dissipative Systeme

Für dissipative Systeme gilt für kleine Volumina, die einen asymptotisch stabilen Fixpunkt  $\underline{x}^*$  umschließen

$$\frac{dV_t}{dt} \approx \int_{V_t} d^3x (\operatorname{div} \underline{F})_{\underline{x}^*} = \Lambda \cdot V_t \quad \Rightarrow \quad V(t) = e^{\Lambda t} V_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

mit Phasenraumkontraktionsrate  $\Lambda$ :

$$\operatorname{div} \underline{F} = \operatorname{tr} \underline{A} = \sum_i \operatorname{Re} \lambda_i < 0$$

Erinnerung: Dissipative Systeme sind solche, die Phasenraumvolumina kontrahieren, d.h. wenn  $\operatorname{div} \underline{F} < 0$

Asymptotisch stabile Fixpunkte (Knoten, Fokus) heißen Senken oder Attraktoren (mit Dimension 0).

Bsp. →

$n=1$

Lasergleichung (Class A)

$$\dot{E} = \frac{1}{2} E (P-1 - E^2) = f(E)$$

$$DF = \frac{\partial}{\partial E} f(E) = \frac{1}{2}(P-1) - \frac{3}{2}E^2 \quad \begin{array}{l} E: \text{elektrisches Feld} \\ P: \text{Pumpstrom} \end{array}$$

$$\text{Fixpunkte: } \begin{array}{ll} E=0 & \textcircled{1} \\ E^2=P-1 & \textcircled{2} \end{array}$$

$$\underline{A} = DF|_{\textcircled{1}} = \frac{1}{2}(P-1)$$

$$DF|_{\textcircled{2}} = -(P-1)$$

↑  
Attraktor  
für  $P < 1$

↑  
Attraktor  $\hat{=}$  stabiler FP  
für  $P > 1$

$n=3$

Lorenzmodell

(abgeleitet aus der Temperatur und Stromungsverteilung einer inkompressiblen Flüssigkeit: Rayleigh-Bénard-System)

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$$

$$\dot{y} = -xz + \rho z - y$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

$$\sigma, \rho, b > 0$$

Linearisierung

$$DF = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z & -1 & \rho - x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{F} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \Lambda = \text{tr DE} = -(\sigma + 1 + b)$$

$$\Rightarrow V(t) = e^{-(\sigma + 1 + b)t} V_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Phasenraumvolumina schrumpfen  
monoton!

Bem.: semiklass. Lasergleichungen (Maxwell - Bloch - Gl.)  
sind äquivalent zu den Lorenzgleichungen. (siehe Hermann Helber)  
(Class & Laser)

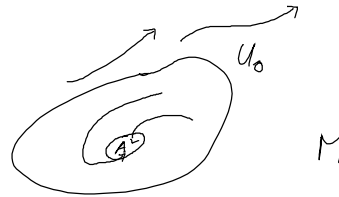
Das Langzeitverhalten dissipativer Systeme wird durch Attraktoren bestimmt.

► Def.: Sei  $\vec{F}$  ein Vektorfeld auf  $M = \mathbb{R}^n$ . Eine abgeschlossene, unter dem Fluss  $\phi_t$  invariante ( $\phi_t(A) \subseteq A$ ), unzerlegbare Teilmenge  $A \subset M$

heißt Attraktor, falls gilt:

(i)  $A \in U_0$  (offene Umgebung von  $A$ ) mit  $\phi_t(U_0) \subseteq U_0$  ( $t > 0$ )

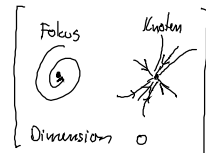
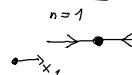
(ii)  $\forall V$  mit  $A \subset V \subset U_0 \exists T > 0$ , so dass  $\phi_t(U_0) \subset V$  ( $t > T$ )

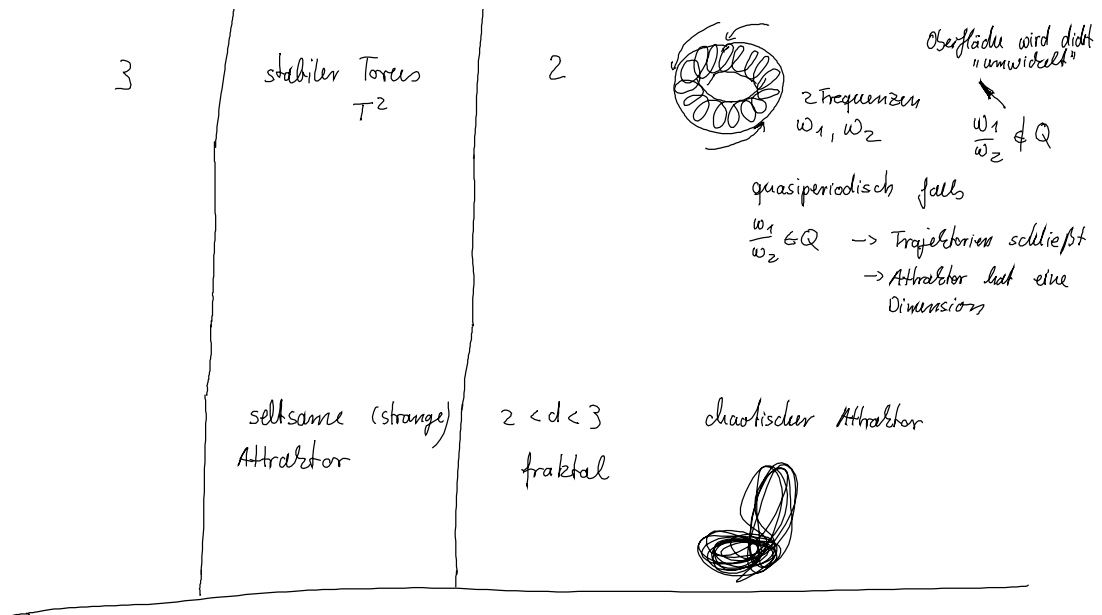


d.h. es gibt ein Attraktorbecken  $U_0$ , aus dem der Fluss asymptotisch in den Attraktor läuft.

NB: Es kann mehrere koexistierende Attraktoren auf  $M$  geben.

Mindestdimension n des Phasenraumes	Attraktor	Attraktor- dimension
1	stabile Fixpunkte	0
2	stabiler Grenzzyklus (limit cycle)	1





### 1.3. Bifurkationen

- Abhängigkeit des Flusses von einem Kontrollparameter  $\mu$  ?
- Zahl und Art der Attraktoren kann sich schlagartig bei einem krit. Wert  $\mu_c$  ändern  
 $\rightarrow$  Bifurkationen („Verzweigung der Lösungsmannigfaltigkeit“)

Notwendige Voraussetzung: Nichtlinearität

- Verknüpft mit Stabilitätswechsel  $\rightarrow$  untersuche lineare Stabilität der Fixpunkte (für lokale Stabilität)

#### Klassifizierung

(A) Eigenwert - Null - Bifurkation  
 $\lambda < 0 \rightarrow \lambda > 0$

$\det A > 0 \rightarrow \det A < 0$

(A1) Sattel-Knoten - Bifurkation

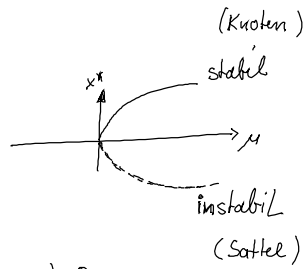
$n=1 \quad \dot{x} = \mu - x^2$

Fixpunkte  $x^* = \pm\sqrt{\mu}$   
 DF =  $-2x$

Zahl der Fixpunkte ändert sich bei  $\mu=0$

$A^{\oplus} = -2\sqrt{\mu}$   
 $A^{\ominus} = 2\sqrt{\mu}$

bei  $\mu=0 : \lambda=0$   
 $\mu > 0 : \lambda \leq 0$

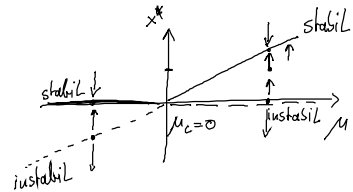


(A2) Transkritische Bifurkation

$\dot{x} = \mu x - x^2$

$x^* = \begin{cases} 0 \\ \mu \end{cases}$       DF =  $\mu - 2x = \begin{cases} \mu \\ -\mu \end{cases}$

Eigenwert  $\lambda \rightarrow e^{\lambda t}$  (siehe)



Normalform

Stabilitätswechsel bei  $\mu=0$

(A3) Stimmgabel - Bifurkation (pitchfork bifurcation)

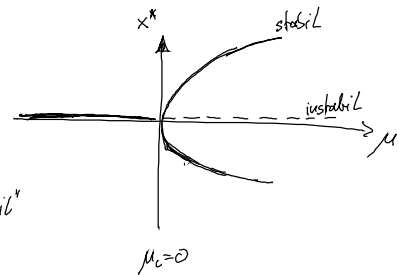
$\dot{x} = \mu x - x^3$

$x^* = \begin{cases} \pm\sqrt{\mu} \\ 0 \end{cases}$       DF =  $\mu - 3x^2 = \begin{cases} -2\mu & \text{stabil für } \mu > 0 \\ \mu & \text{stabil für } \mu < 0 \end{cases}$

Zahl & Stabilitätswechsel

superkritisch

"neue Lösungen sind stabil"



$\dot{x} = \mu x + x^3$

subkritisch

"neue Lösungen sind instabil"

