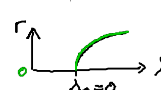
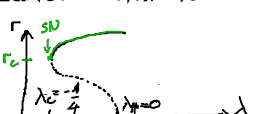


Zusammenfassung der Bifurkationen, die Oszillationen erzeugen:

	<u>Periode</u>	<u>Amplitude</u>
(B) Hopf-Bifurkation $\dot{r} = \lambda r - r^3$ (superkrit.) $\dot{\varphi} = 1 - r^2$ 	$O(1)$	$O(\sqrt{\lambda})$
(C1) Sattel-Knoten von Grenzzyklen  $\dot{r} = \lambda r + r^3 - r^5$ $\dot{\varphi} = 1 + r^2$	$O(1)$	$O(1)$
(D1) SNIPER Bif. $\dot{r} = r - r^3$ $\dot{\varphi} = b - r \cos \varphi$	$O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)$ ↑ Abstand zum Bif. Punkt $\frac{1}{ b^2 - 1 }$ • unendliche periode	$O(1)$
(D2) Homocline Bif.	$O(\ln \mu)$	$O(1)$

1.4. Deterministisches Chaos

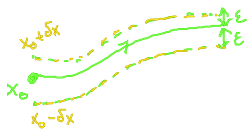
Deterministisches Verhalten (reproduzierbar mit exakt gleichen Startbedingungen), aber „ungeordnete“ Bewegung im Langzeitverhalten von Systemen mit $n \geq 3$ (autonom). Seltsamer (chaotischer) Attraktor

1.4.1. Kriterien zur Klassifikation

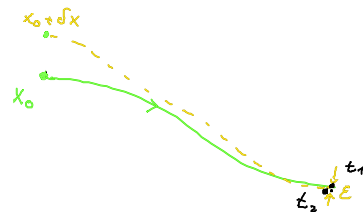
	quasi-period. Verhalten	deterministisches Chaos	stochastisches Verhalten (Rauschen)
<u>dyn. Freiheitsgrade</u> Phasenraumdimensionen	wenige Freiheitsgrad. Attraktor: Torus Td mit $d=2,3,4...$	wenige Freiheitsgrade Attraktor: fraktale Dimension	viele mikroskop. Freiheitsgr. stat. Ensemble für 10^{23} kein Attraktor
<u>Autokorrelationsfunktion</u> $\langle x(t)x(t+\tau) \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$	period. in τ	für $\tau \rightarrow \infty$ $\rightarrow 0$	$= 0$ für $\tau > \tau_c$
<u>Fourierspektrum</u> $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau$ (Wiener-Kinchin)	ω_1, ω_2	breites Frequenzband	breites Frequenzband
		<ul style="list-style-type: none"> • sensible Abhängigkeit von Anfangsbedingungen • typische universelle Bifurkationsstrukturen 	

► Def.: Eine Bewegung heißt chaotisch, wenn sie empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt.

Quantitative Formulierung ; Stabilität gegenüber kleinen Variationen der AB



- bahnstabil
alle benachbarten Bahnen bleiben in einer Röhre um $\phi(t, x_0)$



- asymptotisch Bahnstabil
Abstand benachbarter Bahnen $\rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$
- asymptotisch stabil

$$\dot{x} = F(x)$$



für dasselbe t
gilt
 $0 < |\phi(t, x_0) - \phi(t, x_0 + \delta x)|$
 $t \rightarrow \infty$

Linearisierung in der Nähe der Lösungskurve $\phi(t, x_0)$:

$$\dot{\delta x}_i = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial x_k}}_{A_{ik}(t)}(x(t), t) \delta x_k$$

$A_{ik}(t)$: Eigenwerte $\lambda_k(t)$, Eigenvektoren $f^k(t)$

formale Lösung

$$\delta x(t) = e^{\int_0^t A(t') dt'} \delta x(0)$$

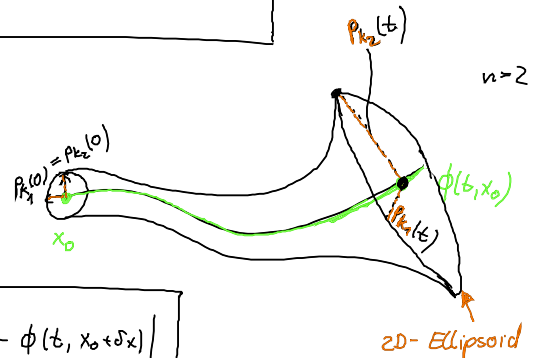
Zeitentwicklung einer infinitesimalen Kugel um x_0

$\rightarrow n$ -dim. Ellipsoid mit Hauptachsen $\rho_k(t) \approx \rho_k(0) e^{\bar{\lambda}_k t}$

► Def.: Stabilität ist bestimmt durch die Lyapunov-Exponenten

$$\bar{\lambda}_k := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\rho_k(t)}{\rho_k(0)}$$

$k=1, \dots, n$
 $\lambda_k = \lambda_1, \dots, \lambda_n$



Bemerkung: Führender (größter) Lyapunov-Exp.

$$\lambda := \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \ln |\phi(t, x_0) - \phi(t, x_0 + \delta x)|$$

$$\Rightarrow |\phi(t, x_0) - \phi(t, x_0 + \delta x)| \sim e^{\lambda t}$$

$\lambda < 0$: kleine Abweichungen der AB werden exp. gedämpft

$\lambda > 0$: exponentielles Auseinanderlaufen benachbarter Bahnen
nicht bahnstabil

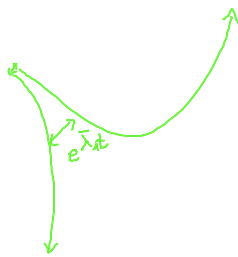
$\hat{=}$ Def. für chaos

Bsp. chaotischer Attraktor im \mathbb{R}^3 : $\bar{\lambda}_1 > 0$, $\bar{\lambda}_2 = 0$, $\bar{\lambda}_3 < 0$

instab. Bewegung
auf dem
Attraktor

Goldstone
Mode
(invariante
Mannigfaltigkeit)

Annäherung
an den
Attraktor



1.4.2. Quantitative Formulierung der fraktalen Dimension des seltsamen Attraktors

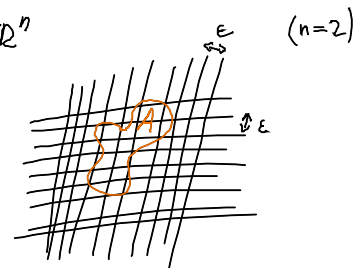
Vordlgem. Dimensionsbegriff:

Hausdorff-Dimension einer Punktmenge A im \mathbb{R}^n

Sei $N(\epsilon)$ die Mindestzahl von n -dim. Würfeln mit Seitenlänge ϵ , um A zu überdecken.

Dann ist

$$d := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$



Gitter aus
 n -dim. Würfeln

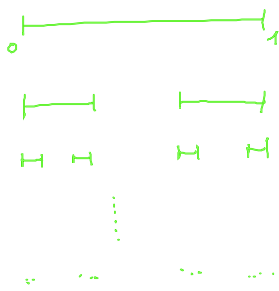
die fraktale Dimension (Hausdorff) d. h. $N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^d}$.

Bsp. : Punkt	$N(\epsilon) = \text{const}$		$d=0$
Linie	$N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$		$d=1$
Fläche	$N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2}$		$d=2$
Volumen	$N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^3}$		$d=3$

(halbe Länge $\epsilon \rightarrow$
doppelt soviel Würfel)

• chaotischer Attraktor im \mathbb{R}^3 , Volumen $\rightarrow 0 \rightarrow d < 3$ aber $d > 2$
ist z.B. im Lorenz-Modell $d \approx 2.05 \dots$

• Beispiel für $0 < d < 1$ ist die Cantormenge



$$\varepsilon = 1 \rightarrow N = 1$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \rightarrow N = 4$$

$$\varepsilon = \frac{1}{9} \rightarrow N = 16$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3^n} \rightarrow N = 4^n$$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2618$$

• Beispiel: Koch's Kurve (Schneeflocke)

Zwischen Linie
und Fläche



$$\varepsilon = 1$$

$$N = 1$$



$$\varepsilon = \frac{1}{3}$$

$$N = 4$$



$$\varepsilon = \frac{1}{9}$$

$$N = 16$$

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$N = 4^n$$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2618$$

Fractal (selbst ähnlich)

z.B. wie Meeresküste