

Wdh

- Feldenergie einer PL divergiert
- E1. Feld ist an gal. GF unstetig

$$\text{Gauss: } \underbrace{n}_{\substack{\text{normale-Vektor} \\ \text{des GF}}} \cdot (\underbrace{E_a}_{\substack{\text{Feld} \\ \text{außen}}} - \underbrace{E_i}_{\substack{\text{Feld} \\ \text{innen}}}) = 4\pi \underbrace{q}_{\substack{\text{Flächenladungsdichte}}}$$

$$\text{Stokes } \underbrace{t}_{\substack{\text{Tang. -komp} \\ \text{stetig}}} \cdot (E_a - E_i) = 0$$

• Plattenkondensator kap. $C = \frac{q}{U}$
 Energie $W = \frac{1}{2} C \cdot U^2$

- Green'sche Theoreme

φ u χ 2 stetig diff'bare sk. Felder auf $V, \partial V$

$$1. \text{GT: } \int_V [\chi \Delta \varphi + (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \chi)] d^3r = \oint_{\partial V} \varphi \frac{\partial \chi}{\partial n} dS$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = n \cdot (\nabla \varphi)$$

$$2. \text{GT: } \int_V [\chi \Delta \varphi - \varphi \Delta \chi] d^3r = \oint_{\partial V} \left(\varphi \frac{\partial \chi}{\partial n} - \chi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS$$

- Potential als Lsg des RWP

$$\Phi(r \in V) = \int_V \frac{\rho(r')}{|r-r'|} d^3r' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[\frac{1}{|r-r'|} \frac{\partial \Phi(r')}{\partial n'} - \Phi(r') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|r-r'|} \right] dS$$

von-Neumann-RB Dirichlet RB
 "Cauchy"-RB

Leiter: Ladungen verschieben sich bei kleinsten ext. Feldern
 Ladungstrennung bis E im Leiter verschwindet

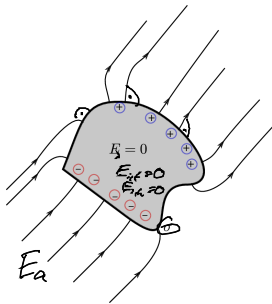
$$E_{\text{Leiter}} = 0 \rightarrow \Phi_{\text{Leiter}} = \text{const.}$$

Leiteroberflächen sind Äq.p. Potentialflächen

(Dirichlet - RB)

$$E_{\text{int}} = 0 = E_{a,b}$$

$$E_{a,b} = 4\pi\sigma \leftarrow \text{"Zuflorenzladung"}$$



1.13. Die Green'sche Funktion der Poisson-Gleichung

allg. Tool zur Lösung von inhomog. linearen part. DGL'n

$$\mathcal{D}_z \psi(z) = \varphi(z)$$

\uparrow Diff-Operator bei z \uparrow Lösung \uparrow Variablen \uparrow Inhomogenität z.B. $\varphi(z)$

$$\mathcal{D}_z G(z,s) = \delta(z-s)$$

\uparrow vereinfachtes Problem \uparrow "Green'sche Fkt"

$$\text{dann } \psi(z) = \int G(z,s) \cdot \varphi(s) ds$$

$$\mathcal{D}_z \psi(z) = \int [\mathcal{D}_z G(z,s)] \cdot \varphi(s) ds$$

$$= \int \delta(z-s) \varphi(s) ds = \varphi(z)$$

Das was: Poisson-GL: $\Delta \Phi = -4\pi \rho$

Green'sche Fkt ist die Lösung für eine Punktladung

$$\Delta G(r, r') = -4\pi \delta(r-r')$$

$$G(r, r') = \frac{1}{|r-r'|} \quad \text{war eine Lösung}$$

$$G(r, r') = \frac{1}{|r-r'|} + f(r, r') : \Delta f(r, r') = 0$$

Idee Wähle $f(r, r')$ so, dass RB erfüllt sind

$$\text{z.B.T.} \int [\Phi(r') \Delta_{r'} G(r, r') - G(r, r') \Delta_{r'} \Phi(r')] d^3 r'$$

$$= -4\pi \int d^3 r' \Phi(r') \delta(r-r') + 4\pi \int d^3 r' G(r, r') \rho(r')$$

$$= \oint_{\partial V} \left[\Phi(r') \frac{\partial G}{\partial n'} - G(r, r') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right] dS'$$

$$\Phi(r) = \int_V \rho(r') G(r, r') d^3 r' - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[\Phi(r') \frac{\partial G}{\partial n'} - G(r, r') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right] dS'$$

a.) Dirichlet RB $\Phi(r')$ für $r' \in \partial V$ gegeben

$$\text{wollen } \oint_{\partial V} G(r, r') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} dS' = 0$$

→ wähle $G(r, r') = 0 \quad \forall r' \in \partial V$

$$\Phi(r \in V) = \int_V \rho(r') G_D(r, r') d^3 r' - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \Phi(r') \frac{\partial G_D(r, r')}{\partial n'} dS'$$

Wichtig

Dirichlet-RB

b.) von-Kleinman RB

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} = -\underline{E} \cdot \underline{n} \quad \text{sei auf } \partial V \text{ gegeben}$$

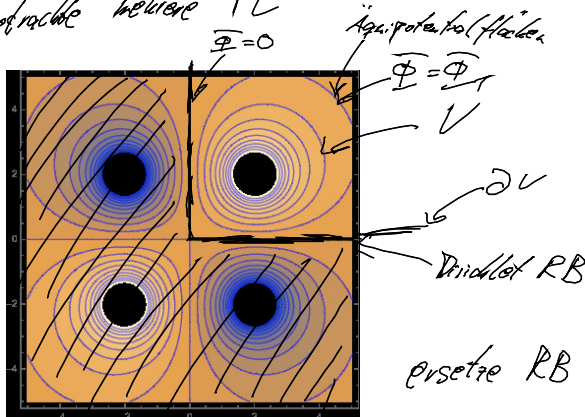
Forderung $\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \bar{\Phi}(r') \frac{\partial G_N}{\partial n'} dS' \stackrel{!}{=} -\bar{\Phi}_0$

$$\Rightarrow \bar{\Phi}(r \in V) = \bar{\Phi}_0 + \int \rho(r') G_N(r, r') d^3 r' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} G_N(r, r') \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n'} dS'$$

Wie bekommt man G_N ?

1.14. Methode der Bildladungen

betrachte mehrere PL



ersetze RB durch imaginäre Ladungen

Bsp: $V = \{(x, y, z) \mid z > 0\}$

Dirichlet-RB $\bar{\Phi}(x, y, 0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \bar{\Phi}(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \bar{\Phi}(x, y, z) = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \bar{\Phi}(x, y, z) = 0$$

$$G(r, r') = \frac{1}{|r - r'|} + f(r, r')$$

↑
Ort der PL

$$\Delta f(r, r') = 0 \quad \forall r \in V$$

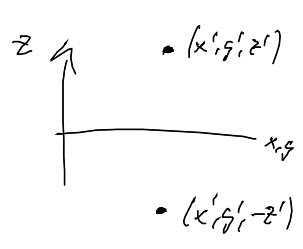
$$\oint G_0(r, r') \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n'} dS' = 0$$

$$\lim_{z' \rightarrow 0} f(r, r') = \frac{-1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} \Rightarrow G_D(r, r') = 0 \quad \forall r' \in \partial V$$

$$\rightarrow f(r, r') = \frac{-1}{|r-r_B|} = \frac{-1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}}$$

$$G_D(r, r') = \frac{1}{|r-r'|} - \frac{1}{|r-r_B'|}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -z' \end{pmatrix}$$



$$\Delta f(r, r') = \delta(r-r_B') = 0 \quad \forall r \in V \quad \text{weil } r_B' \notin V$$

$$G_D(r, r') = \frac{1}{|r-r'|} - \frac{1}{|r-r_B'|}$$

falls $\Phi(x, y, 0) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \Phi(r \in V) = \int d^3 r' \rho(r') \left[\frac{1}{|r-r'|} - \frac{1}{|r-r_B'|} \right]$$

falls $\Phi(x, y, 0) \neq 0$

$$\frac{\partial G_D}{\partial z'} \Big|_{z'=0} = - \frac{\partial}{\partial z'} G_D(r, r') = \frac{-2z}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{3/2}}$$

$\in V$ keine neg. z-Richtung

$$\Phi(r) = \int \rho(r') G_D(r, r') d^3 r' + \frac{2z}{4\pi} \iint dx' dy' \frac{\Phi(x', y', 0)}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{3/2}}$$

"Bildladungen ersetzen Randbedingungen"

1. 14. 1. Beispiel PL von Ebene

$$q \text{ an Orte } r' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z' \end{pmatrix} \quad z' > 0$$

Ansatz $\Phi(r) = \frac{q}{|r-r'|} + \frac{q_B}{|r-r_B'|}$ ↙ unbekannt

Dirichlet-RB

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z')^2}} + \frac{q_B}{\sqrt{(x-x_B)^2 + (y-y_B)^2 + z_B^2}} = 0$$

$$q_B = 0$$

$$q_B = 0$$

$$z_B = -z'$$

$$q_B = -q$$

$$\Phi(r) = q \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+z')^2}} \right] \quad \forall r \in V$$

$$E(r) = q \left[\frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-z' \end{pmatrix} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z+z')^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+z' \end{pmatrix} \right]$$

$$E(x, y, 0) = \frac{q}{[x^2 + y^2 + z'^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2z' \end{pmatrix} \quad \text{vgl. Normalenkomponente von } E \text{ an GF}$$

Flächenladungsdichte

$$\sigma(x, y) = \frac{\epsilon_0 \cdot E(x, y, 0)}{4\pi} = -\frac{q}{2\pi} \frac{z'}{[x^2 + y^2 + (z')^2]^{3/2}}$$

ges. Influenzladung

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \iint dx dy \sigma(x, y) = -\frac{q}{2\pi} \int_0^\infty dy \int_0^\infty dx \frac{y \cdot z'}{[y^2 + (z')^2]^{3/2}} \\ &= -q \cdot z' \int_0^\infty \frac{y dy}{[y^2 + z'^2]^{3/2}} = -q z' \int_0^\infty dy \frac{d}{dy} \left(-\frac{1}{\sqrt{y^2 + z'^2}} \right) \\ &= -q z' \left(-0 + \frac{1}{z'} \right) = -q = +q_B \end{aligned}$$

