Fr. Klausur 15.2. 8–10 Architekturgebäude 7^{55}

- Achtung BVG-Streik ☹
- keine Hilfsmittel, Blätter werden gestellt, Stifte & Ideen mitbringen, Studentenausweis mitbr.
- falls Nachteilsausgleich, bitte mitbringen $\longrightarrow$ EW 060

Wdh • EM Feld quantisiert

$$\boxed{\begin{array}{l} [a_{\underline{k}\lambda}, a^{\dagger}_{\underline{q}\sigma}] = \delta_{\underline{k}\underline{q}}\,\delta_{\lambda\sigma} \\ \qquad\quad \text{Wellenvektor} \quad \text{Polarisation} \\ [a_{\underline{k}\lambda}, a_{\underline{q}\sigma}] = 0 \\ [a^{\dagger}_{\underline{k}\lambda}, a^{\dagger}_{\underline{q}\sigma}] = 0 \end{array}}$$

bos. Kommutatorrelationen

$$[A,B] = AB - BA$$

- $|\underline{n}\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \ldots \otimes |n_K\rangle$

Gesamtzahl aller Moden

$$\langle \underline{n}|\hat{\underline{E}}|\underline{n}\rangle = 0$$

- Ausweg kohärente Zustände $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ $\quad \alpha \in \mathbb{C}$

$$|\psi\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes \ldots \otimes |\alpha_n\rangle$$

$$\longrightarrow \langle\psi|\hat{\underline{E}}|\psi\rangle \neq 0$$

reproduz. klass. ERW
$\alpha_n \hat{=} A_\lambda(k)$

8.5 Elektron-Feld-WW

8.5.1 Hamilton-Operator

$$H = H_1 + H_2 + H_{12}$$

$$[H_1, H_2] \overset{!}{=} 0$$

auch H_{12} für Wechselwirkung $n \hat{=} (\underline{k}, \lambda)$

$$H_1 = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + V(\hat{r}) \qquad H_2 = \sum_k \hbar\omega_n (a_n^\dagger a_n + 1/2)$$

WW: minimale Kopplung $\hat{\underline{p}} \longrightarrow \hat{\underline{p}} - \frac{e}{c}\hat{\underline{A}}$

$$H_1 \longrightarrow H_1' = \frac{(p - \frac{e}{c}A)^2}{2m} + V(r) = H_1 \underbrace{- \frac{e}{2mc}(\hat{\underline{p}}\cdot\hat{\underline{A}} + \hat{\underline{A}}\cdot\hat{\underline{p}})}_{\text{paramagnet. Kopplung}} + \underbrace{\frac{e^2}{2mc^2}\hat{\underline{A}}^2}_{\text{diamagnet. Kopplung}}$$

$$\bar{p} = -i\hbar\nabla \longrightarrow \hat{p}\cdot\hat{A} = \hat{A}\cdot\hat{p} \quad \text{wegen } \nabla\hat{A} = 0$$

Näherungen: + Vernachl. der diamagnet. Kopplung $\frac{e^2}{2mc^2}\hat{A}^2 \to 0$

+ $\underline{r}$-Abhängigkeit in A vernachlässigen

$$\hat{\underline{A}}_s = \sum_k \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega(k)\cdot L^3}}\,(a_k + a_k^\dagger)\,\underline{u}_k$$

$$\boxed{H_I \approx -\frac{e}{mc}\sum_k \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3\omega(k)}}\,(a_k + a_k^\dagger)(\underline{u}_k\cdot\hat{\underline{p}})}$$

e^--Feld-WW

$$H_1 = \sum_a E_a\,|a\rangle\langle a|$$

$$\boxed{H_I = \sum_{ab}\sum_k \hbar g_k^{ab}\,|a\rangle\langle b| \otimes (a_k + a_k^\dagger)} \qquad \hbar g_k^{ab} = -\frac{e}{mc}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3\omega(k)}}\,\langle a|\underline{u}_k\cdot\underline{p}|b\rangle$$

a.) $g_k^{aa} = 0$

wegen $\hat{\underline{p}} = i\frac{m}{\hbar}[H_1, \hat{\underline{r}}]$ $\qquad [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$

$$\rightsquigarrow \langle a|\underline{u}_k\cdot\hat{\underline{p}}|b\rangle = \frac{im}{\hbar}(E_a - E_b)\,\underline{u}_k\cdot\langle a|\hat{\underline{r}}|b\rangle$$

b.) häufig: nur 2 Zustände $|g\rangle, |e\rangle$

$$g_k^{ee} = g_k^{gg} = 0 \qquad g_k^{eg} = g_k^{ge} = g_k$$

$$|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e| = \mathbb{1}$$

$$H_1 = E_g|g\rangle\langle g| + E_e|e\rangle\langle e| = \frac{1}{2}(E_e + E_g)\cdot\mathbb{1} + \frac{E_g - E_e}{2}\cdot[\underbrace{|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|}_{\sigma^z}]$$

Pauli-Matrizen

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^+ = \frac{1}{2}(\sigma^x + i\sigma^y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |e\rangle\langle g| \qquad \sigma^- = \frac{1}{2}(\sigma^x - i\sigma^y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |g\rangle\langle e|$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \underbrace{\frac{\hbar\omega}{2}\sigma^z}_{\text{"System"}} + \underbrace{\sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k}_{\text{"Bad"}} + \underbrace{(\sigma^- + \sigma^+)}_{\sigma^x} \otimes \sum_k \hbar g_k (a_k + a_k^\dagger)}$$

Spin-Boson-Modell

i.a. Allg. nicht lösbar

8.5.2. Fermis Goldene Regel

Abschätzung für Störungsind. Übergänge

Vorauss.:

$t=0 \quad |\Psi(0)\rangle = |i\rangle \Rightarrow H_0 |i\rangle = E_i |i\rangle$

$$H = \underset{\text{möglichst einfach}}{H_0} + \underset{\text{Störung: klein}}{V}$$

$$P_{i\to f} = |\langle f|\Psi(\Delta t)\rangle|^2 = |\langle f| U(\Delta t)|i\rangle|^2$$

$$U(\Delta t) = e^{-i(H_0+V)\cdot\Delta t}$$

falls V = const

SGL $|\dot\Psi\rangle = -\frac{i}{\hbar}(H_0 + V)|\Psi\rangle$

$$|\tilde\Psi\rangle = e^{+iH_0\cdot t}|\Psi\rangle$$
$$\tilde V(t) = e^{+iH_0\cdot t} V e^{-iH_0\cdot t}$$

$$|\dot{\tilde\Psi}\rangle = -\frac{i}{\hbar}\underset{\text{zeitabh.}}{\tilde V(t)}|\tilde\Psi(t)\rangle$$

Näherung

$$\longrightarrow \tilde U = \underset{\text{Zeitordnung}}{\hat{\mathcal{T}}} \exp\left\{-i\int_0^t \tilde V(t')dt'\right\} \approx \mathbb{1} - i\int_0^t \tilde V(t')dt' + \ldots$$

$$\tilde V(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} V e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}$$

$$P_{i\to f}(\Delta t) = \left|\int_0^{\Delta t} e^{+\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)\cdot t}dt\right|^2 |\langle f|V|i\rangle|^2$$

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$= \frac{\Delta t^2}{\hbar^2}\underbrace{\frac{\sin^2\frac{(E_f-E_i)\Delta t}{2\hbar}}{\left(\frac{E_f-E_i}{2\hbar}\Delta t\right)^2}}_{\mathrm{sinc}^2\left(\frac{E_f-E_i}{2}\Delta t\right)} |\langle f|V|i\rangle|^2$$

$$\boxed{\lim_{\tau\to\infty} \tau\cdot\mathrm{sinc}^2[\Omega\cdot\tau] = \pi\cdot\delta(\Omega)}$$

$$\boxed{R_{i\to f} = \lim_{\Delta t\to\infty}\frac{P_{i\to f}(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\hbar}\delta(E_f - E_i)|\langle f|V|i\rangle|^2}$$

Rate für Übergang von $|i\rangle \to |f\rangle$

Prozesse, welche die Gesamtenergie nicht erhalten, sind unterdrückt (bzgl. H_0)

8.5.3. Prozesse

$$H_0 = \sum_a E_a |a\rangle\langle a| + \sum_k \hbar\omega_k a_k^+ a_k$$

$$V = \sum_k \sum_{ab} \hbar g_k^{ab} |a\rangle\langle b| \otimes (a_k + a_k^+)$$

$|a\rangle\langle b| \otimes a_k$: $E_a < E_b$ $\hat{=}$ Abregung + Absorbtion — unterdrückt

$|a\rangle\langle b| \otimes a_k^+$: $E_a < E_b$ $\hat{=}$ " + Emission — $\hbar\omega_k \approx E_b - E_a$ b)

$|a\rangle\langle b| \otimes a_k$: $E_a > E_b$ $\hat{=}$ Anregung + Absorbtion — $\hbar\omega_k \approx E_a - E_b$ a)

$|a\rangle\langle b| \otimes a_k^+$: $E_a > E_b$ $\hat{=}$ " + Emission — unterdrückt

a) $|i\rangle = |1\rangle \otimes |n_1^i, \ldots, n_k^i, \ldots, n_K^i\rangle$ $\qquad |f\rangle = |2\rangle \otimes |n_1^i, \ldots, n_k^i - 1, \ldots, n_K^i\rangle$

$E_2 > E_1$ $\qquad E_i = E_1 + n_1^i \hbar\omega_1 + \ldots + n_K^i \hbar\omega_K$

$\qquad E_f = E_2 + n_1^i \hbar\omega_1 + \ldots + (n_k^i - 1)\cdot\hbar\omega_k + \ldots + n_K^i \hbar\omega_K$

- $$R_{1\to 2}^{\text{absorbtion}} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_f - E_i) \left| \sum_k \sum_{ab} \hbar g_k^{ab} \langle 2|a\rangle\langle b|1\rangle \underbrace{\langle n_k^i - 1 | a_k | n_k^i\rangle}_{\sqrt{n_k^i}} \right|^2$$
$$= 2\pi\hbar \left|g_k^{21}\right|^2 \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_k)\, n_k^i$$

nur vorh. Photonen können absorbiert werden

- $$R_{2\to 1}^{\text{emission}} = 2\pi\hbar \left|g_k^{12}\right|^2 \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_k)\,(n_k^i + 1)$$

$= |g_k^{21}|^2$ "stimulierte Emission" (Laser) "spontane Emission"

§5.4 Lebensdauer

Annahme $|i\rangle = |e\rangle \otimes |0, \ldots, 0\rangle$ $\qquad |f^k\rangle = |g\rangle \otimes |0\ldots 010\ldots 0\rangle$

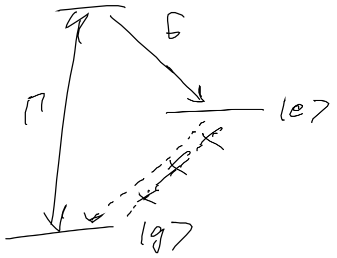
$$\frac{1}{\tau} = \sum_k R_{e\to g}^{ek} = \sum_k \frac{2\pi}{\hbar} \left|\hbar g_k^{eg}\right|^2 \delta(E_e - E_g - \hbar\omega_k)$$

Lebensdauer

$$= \sum_k \sum_\lambda \frac{4\pi^2 e^2 (E_e - E_g)^2}{L^3 \cdot \omega(k) \cdot \hbar^2} \left| \underline{\epsilon}_\lambda^k \cdot \langle e | \hat{\underline{r}} | g\rangle \right|^2 \delta(E_e - E_g - \hbar\omega_k)$$

$$\frac{1}{L^3}\sum_k \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^\infty k^2 dk$$

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{4}{3} \frac{e^2}{\hbar c^3} \frac{(E_e - E_g)^3}{\hbar^3} \left|\langle e | \hat{r} | g\rangle\right|^2}$$



$\Rightarrow \boxed{P_e > P_g}$ Besetzungsinversion

Viel Erfolg bei der Klausur! ☺

Schluss