

• Abt. BVG-Struktur

- keine Hülfsblätter, Blätter werden geschickt, Stifte & Taschenrechner mitbringen, Studenten auswaschen mitbr.
- falls Nachbearbeitung, bitte mitbringen → EW 060

Wicht. • EM Feld quantisiert

$$\begin{aligned}
 [a_{kz}, a_{q\sigma}^{\dagger}] &= \delta_{kz} \delta_{z\sigma} \\
 &\quad \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\
 &\quad \text{Wellenvektor} \quad \text{Polarisation} \\
 [a_{kz}, a_{q\sigma}] &= 0 \\
 [a_{kz}^{\dagger}, a_{q\sigma}^{\dagger}] &= 0
 \end{aligned}$$

bos. kommutat. relationen

$[A, B] = AB - BA$

• $|u\rangle = |u_1\rangle \otimes |u_2\rangle \otimes \dots \otimes |u_n\rangle$

Gesamtzahl aller Moden

$\langle u | E^{\dagger} | u \rangle = 0$

• Ausweg kommutat. Zustände $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad \alpha \in \mathbb{C}$

$|u\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_n\rangle$

$\rightarrow \langle u | E^{\dagger} | u \rangle \neq 0$

reproduz. Abh. ERW
 $\alpha_n \hat{=} A_z(k)$

8.5 Elektron-Feld-WW

8.5.1. Hamilton-Operator

$H = H_1 + H_2 + H_m$

$[H_1, H_2] = 0$

noch H_2 für Wechselwirkung $k \hat{=} (k, z)$

$H_1 = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + V(\hat{r})$

$H_2 = \sum_k \hbar \omega_k (a_k^{\dagger} a_k + \frac{1}{2})$

WW: minimale Kopplung $\hat{p} \rightarrow \hat{p} - \frac{e}{c} \hat{A}$

$H_1 \rightarrow H_1' = \frac{(\hat{p} - \frac{e}{c} \hat{A})^2}{2m} + V(\hat{r}) = H_1 - \frac{e}{2mc} (\hat{p} \cdot \hat{A} + \hat{A} \cdot \hat{p}) + \frac{e^2}{2mc^2} \hat{A}^2$

$\hat{p} = -i\hbar \nabla \rightarrow \hat{p} \cdot \hat{A} = \hat{A} \cdot \hat{p}$ wegen $\nabla \cdot \hat{A} = 0$

paramet. Kopplung diamagnet. Kopplung

o Näherung + Vernachl. des diamagnet. Kopplung $\frac{e^2}{2mc^2} \hat{A}^2 \rightarrow 0$
 + \hat{p} -Abhängigkeit in A vernachlässigen

$$\hat{A}_s = \sum_k \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V}} (a_k + a_k^\dagger) \underline{u}_{k,s}$$

$$H_D \approx -\frac{e}{mc} \sum_k \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3 \omega_k}} (a_k + a_k^\dagger) (\underline{u}_k \cdot \hat{p})$$

e-Feld-WW

$$H_1 = \int d^3x E_a \cdot (a \times a)$$

$$H_I = \sum_{ab} \sum_k \hbar g_k^{ab} |a \times b| \otimes (a_k + a_k^\dagger)$$

$$\hbar g_k^{ab} = -\frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3 \omega_k}} \langle a | \underline{u}_k \cdot \hat{p} | b \rangle$$

a.) $\underline{g}_k^{aa} = 0$

wegen $\hat{p} = -i\hbar \nabla = [H_1, \hat{p}]$ $[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}$

$$\rightarrow \langle a | \underline{u}_k \cdot \hat{p} | b \rangle = \frac{i\hbar}{\tau} (E_a - E_b) \underline{u}_k \cdot \langle a | \hat{r} | b \rangle$$

b.) Hinweis: nur 2 Zustände $|g\rangle, |e\rangle$

$$g_k^{ee} = g_k^{gg} = 0 \quad g_k^{eg} = g_k^{ge} = g_k$$

$$|g \times g| + |e \times e| = 0$$

$$H_1 = E_g |g \times g\rangle + E_e |e \times e\rangle = \frac{E_e + E_g}{2} \cdot \mathbb{1} + \frac{E_g - E_e}{2} \cdot \underbrace{[|e \times e\rangle - |g \times g\rangle]}_{B^z}$$

Pauli-Matrizen

$$B^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad B^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^+ = \frac{1}{2}(B^x + iB^y) \quad B^- = \frac{1}{2}(B^x - iB^y)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= |e \times g\rangle \quad = |g \times e\rangle$$

$$\Rightarrow H = \frac{E_e + E_g}{2} B^0 + \sum_k \hbar g_k (a_k^\dagger a_k + \frac{B^- + B^+}{B^x}) \otimes \sum_k \hbar g_k (a_k + a_k^\dagger)$$

SPIN-Boson-Modell ("Bad")

• 7. Allg. nicht lösbar

8.5.2. Fermi's Golden Rule

Abschätzung für Störungsrechnung

Voraussetzungen:

$$t \rightarrow 0 \quad |i\rangle = |1\rangle \Rightarrow H_0 |i\rangle = E_i |i\rangle$$

$$H = H_0 + V$$

wichtig einfach

Störung: klein

$$P_{i \rightarrow f} = |\langle f | \psi(t) \rangle|^2 = |\langle f | U(t) | i \rangle|^2$$

$$U(t) = e^{-i(H_0 + V)t}$$

falls $V = \text{const}$

$$\text{SGL } |\tilde{\psi}\rangle = -\frac{i}{\hbar} (H_0 + V) |\tilde{\psi}\rangle$$

$$|\tilde{\psi}\rangle = e^{-iH_0 t} |\psi\rangle$$

$$\tilde{V}(t) = e^{+iH_0 t} V e^{-iH_0 t}$$

$$|\tilde{\psi}\rangle = -\frac{i}{\hbar} \tilde{V}(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle$$

$$\tilde{\psi} \approx \tilde{U} \exp\left\{-i \int_0^t \tilde{V}(t') dt'\right\} \approx \mathbb{1} - i \int_0^t \tilde{V}(t') dt' + \dots$$

Näherung

$$P_{i \rightarrow f}(t) = \left| \int_0^t e^{+i(E_f - E_i)t'} dt' \right|^2 |\langle f | V | i \rangle|^2$$

$$= \frac{t^2}{\hbar^2} \frac{\text{sinc}^2\left(\frac{E_f - E_i}{2\hbar} t\right)}{\left(\frac{E_f - E_i}{2\hbar}\right)^2} |\langle f | V | i \rangle|^2$$

$\text{sinc}^2\left(\frac{E_f - E_i}{2\hbar} t\right)$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sinc}(x)}{x}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot \text{sinc}^2\left[\frac{E_f - E_i}{2\hbar} t\right] = \pi \cdot \delta(E_f - E_i)$$

$$R_{i \rightarrow f} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_{i \rightarrow f}(t)}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_f - E_i) |\langle f | V | i \rangle|^2$$

Rate für Übergang von $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$

Prozesse, welche die Conservation verletzen, sind unterdrückt (bzgl. H_0)

8.5.3. Prozesse

$$H_0 = \sum_{\alpha} E_{\alpha} |a \times a\rangle + \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}}$$

$$V = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha\beta} \hbar g_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta} |a \times b\rangle \otimes (a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}}^{\dagger})$$

$ a \times b\rangle \otimes a_{\mathbf{k}} : E_a < E_b$	$\stackrel{1}{=}$	Anregung + Absorption	unterdrückt	
$ a \times b\rangle \otimes a_{\mathbf{k}}^{\dagger} : E_a < E_b$	$\stackrel{1}{=}$	" + Emission	$\hbar \omega_{\mathbf{k}} \approx E_b - E_a$	b)
$ a \times b\rangle \otimes a_{\mathbf{k}} : E_a > E_b$	$\stackrel{1}{=}$	Anregung + Absorption	$\hbar \omega_{\mathbf{k}} \approx E_a - E_b$	a)
$ a \times b\rangle \otimes a_{\mathbf{k}}^{\dagger} : E_a > E_b$	$\stackrel{1}{=}$	" + Emission	unterdrückt	

$$a |i_1 i_2 \dots\rangle \otimes |k_1, \dots, k_i, \dots, k_k\rangle \quad |f\rangle = |2\rangle \otimes |k_1, \dots, k_{i-1}, \dots, k_k\rangle$$

$$E_i > E_1 \quad E_i = E_1 + \hbar \omega_{k_1} + \dots + \hbar \omega_{k_i}$$

$$E_f = E_2 + \hbar \omega_{k_1} + \dots + (\hbar \omega_{k_{i-1}}) + \dots + \hbar \omega_{k_i}$$

$$\bullet R_{1 \rightarrow 2}^{absorption} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_f - E_i) \left| \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha\beta} \hbar g_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta} \langle 2 | a \times b | 1 \rangle \underbrace{\langle k_{i-1} | a_{\mathbf{k}} | k_i \rangle}_{\sqrt{N_{k_i}}} \right|^2$$

$$= 2\pi \hbar |g_{\mathbf{k}}^{21}|^2 \delta(E_2 - E_1 - \hbar \omega_{\mathbf{k}}) N_{k_i}$$

↑
hier versch. Photonen können absorbiert werden

$$\bullet R_{2 \rightarrow 1}^{emission} = 2\pi \hbar |g_{\mathbf{k}}^{12}|^2 \delta(E_2 - E_1 - \hbar \omega_{\mathbf{k}}) (k_i + 1)$$

$$= |g_{\mathbf{k}}^{21}|^2 \left(\begin{array}{l} \text{"stimulierte Emission"} \\ \text{(Laser)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \text{"spontane Emission"} \end{array} \right)$$

8.5.4 Lebensdauer

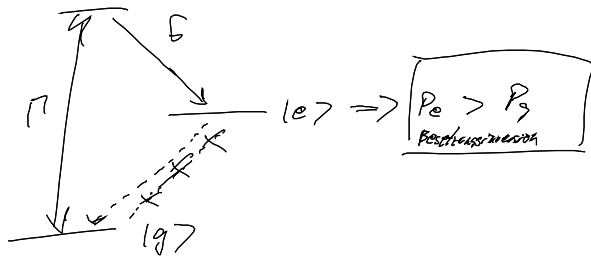
$$\text{Atom} |i\rangle = |e\rangle \otimes |0, \dots, 0\rangle \quad |f^k\rangle = |g\rangle \otimes |0, \dots, 0, \dots, 0\rangle$$

$$\frac{1}{\tau} = \sum_{\mathbf{k}} R_{e \rightarrow g} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{2\pi}{\hbar} \left(\hbar g_{\mathbf{k}}^{eg} \right)^2 \delta(E_e - E_g - \hbar \omega_{\mathbf{k}})$$

$$\stackrel{\text{Lebensdauer}}{\uparrow} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \frac{\hbar^2 e^2 (E_e - E_g)^2}{L^3 \omega(\lambda) \cdot \hbar^2} \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0} \langle e | \hat{E} | g \rangle \right)^2 \delta(E_e - E_g - \hbar \omega_{\mathbf{k}})$$

$$\frac{1}{\tau} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{\infty} k^2 dk$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{4}{3} \frac{e^2}{\hbar c^3} \frac{(E_e - E_g)^3}{\hbar^3} |\langle e | \hat{r} | g \rangle|^2$$



Viel Erfolg bei der Klausur!

Schluss