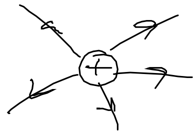
Ankündigung

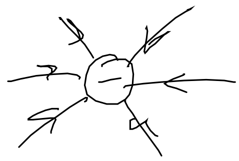
- Bachelorsgrup. 24.10 16^{00} in BH-N 243
- 1.11. (Do) 16^{15} in EW 202
  Physik. Kolloq.

- VL: Gauss-System
  Üb: SI-System

- **Wdh**
  + Stromdichte
    Kont.-gl. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla j = 0$
  + Feldlinien



Quellen



Senken

  + Potential $\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla \underline{\Phi}(\underline{r})$

$$\Phi(r) = \int \frac{\rho(\underline{r}')}{|r-r'|} d^3r'$$

  + Dirac-δ in 3d

$$\delta(r-r') = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|r-r'|}$$

  + Grundgl. der ES

integr. Form $\oiint_{\partial V} \underline{E} \cdot d\underline{S} = 4\pi \cdot q_V$ $\qquad \oint \underline{E} \cdot d\underline{r} = 0$

diff. Form $\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = 4\pi \rho$ $\qquad \nabla \times E = 0$

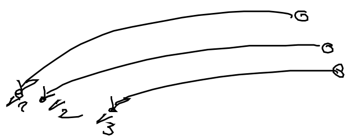
$\left[\text{SI}: \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \times E = 0 \right]$

  + Poisson-Gleichung $\Delta \underline{\Phi}(\underline{r}) = -4\pi \rho(\underline{r})$

+ Energiedichte d. elekt. Feldes

$$W = \int d^3r \, w(r)$$

$$w(r) = \frac{1}{8\pi} |E(r)|^2$$



$$E_{SI} = \left[\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\right]^{-1} E_G$$

$$\rho_{SI} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0} \cdot \rho_G$$

$$w(r) = \frac{1}{8\pi} |E(r)|^2$$

betr. Punktladung am Ursprung $\quad \underline{E}(r) = \frac{e}{r^2} \cdot \underline{e_r}$

$$w(r) = \frac{e^2}{8\pi r^4}$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \, r^2 \sin\vartheta \, \frac{e^2}{r^4}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty dr \frac{e^2}{r^2} = -\frac{e^2}{2r}\Big|_0^\infty \longrightarrow \infty$$

Abschätzung der Gesamtenergie für endliche Ladung.

$$\frac{e^2}{2 \cdot r^*} = m_e \cdot c^2$$

$$r_e \equiv \frac{e^2}{m_e c^2} \quad \text{klass. El.-Radius}$$

$$= 2.8 \cdot 10^{-15} \, m = 2.8 \, fm$$

Exp : $r_e < 10^{-3} \, fm = 10^{-18} \, m$

QED $\rightarrow$ endl. Energie des e^-

1.9. Radialsymm. Ladungsverteilungen

+ Punktladung
$\rho(\underline{r}) = q \cdot \delta(\underline{r}) \longrightarrow \underline{\Phi} = \frac{q}{r} \longrightarrow \underline{E} = \frac{q}{r^2} \underline{e_r} = \frac{q}{r^3} \underline{r}$

+ Kugelschale Radius R, Ladung q

$$\rho(r) = \frac{q}{4\pi R^2}\,\delta(r-R)$$

$$\Phi(r) = \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|}\,d^3r' = \frac{q}{4\pi R^2}\int_0^\infty dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\vartheta' \frac{r'^2 \sin\vartheta'\,\delta(r'-R)}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta'}}$$

$x=\cos\vartheta$
$$= \frac{q}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{r^2+R^2-2r\cdot R\cdot x}}$$

$$= \frac{q}{R}\,\Theta(R-r) + \frac{q}{r}\,\Theta(r-R)$$

innerhalb — außerhalb

$$\oiint \underline{E}\cdot d\underline{S} = 4\pi\cdot q_V$$

$\underline{r<R}$ $E(r)\cdot 4\pi r^2 = 0 \longrightarrow E(r<R) = 0$

$\underline{r>R}$ $E(r)\cdot 4\pi r^2 = 4\pi q \longrightarrow \underline{E}(r>R) = \frac{q}{r^2}\,\underline{e}_r$

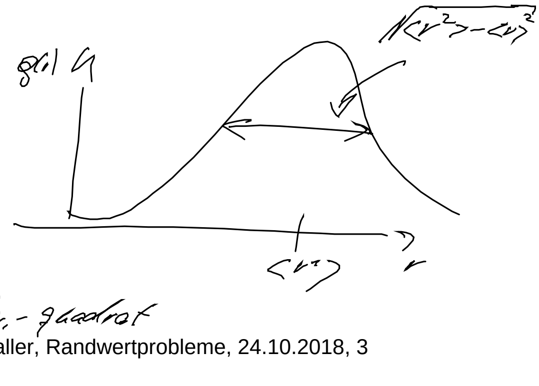
∘ homog. gel. Kugel
$$\rho(r) = \frac{q}{\frac{4\pi}{3}R^3}\,\Theta(R-r)$$

∘ kleine Atomkerne
$$\rho(r) = \frac{q}{8\pi\lambda^3}\,e^{-r/\lambda}$$
charakt. Ausdehnung

vgl. QM H-Atom
$$\rho(r) = \frac{-e}{\pi\cdot a_0^3}\cdot e^{-2r/a}$$

Bohr'scher Radius
$a_0 \approx 0.53\cdot 10^{-10}\,m$
$\lambda = \frac{a_0}{2}$

. falls $\rho(r) \geq 0$
$$\langle r^k\rangle = \frac{\int d^3r\, r^k \rho(r)}{\int \rho(r)\,d^3r}$$



$\langle r^1\rangle \hat{=}$ mittl. Radius

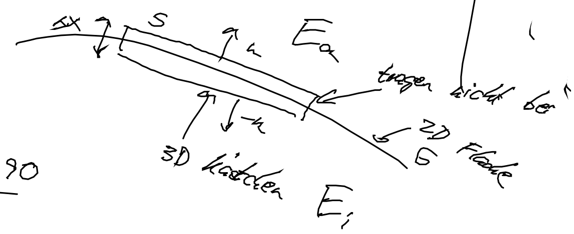
$\langle r^2\rangle - \langle r\rangle^2 \hat{=}$ mittl. Schw.-quadrat

1.10. Grenzflächen

an GF mit einer Flächenladungsdichte σ kann $\underline{E}$ sich unstetig verhalten

$$[\sigma]_{SI} = \frac{C}{m^2} \longrightarrow q = \iint_S \sigma(r)\, dS$$

GF



$\Delta x \to 0$

$$\oiint \underline{E}\, d\underline{S} = 4\pi\sigma S = n\cdot(E_a - E_i)\cdot S$$

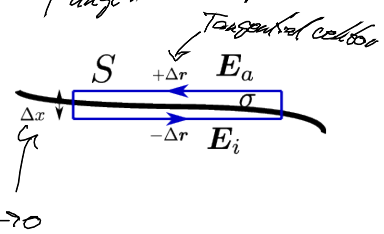
$$\underline{n}\cdot(\underline{E_a} - \underline{E_i}) = 4\pi\cdot\sigma$$

Normalen-Komp. von E hat einen Sprung an der GF

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} \qquad \text{(Bsp. Kugelschale)}$$

$$E_a = \frac{q}{R^2}$$

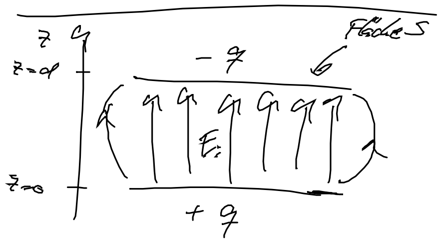
- Tangential-Komp.



$$0 = \oint E\cdot dr = (E_a - E_i)\cdot\Delta r$$

$E_{a,t} = E_{i,t}$ Tang.-Komponente ist stetig

1.11. Plattenkondensator



$$\sigma = \pm \frac{q}{S}$$

Annahmen: + Platten sehr groß

+ außen verschw. das el. Feld $E_a = 0$

$$(\underline{E}_i - \underline{E}_a)\cdot \underline{n} \underset{z}{=} \underline{E}_i \cdot \underline{n} \equiv E = 4\pi\sigma = 4\pi \frac{q}{S}$$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = -\int_0^d E(z)\,dz = -E\cdot d = -\frac{4\pi q\cdot d}{S} \equiv -U$$

Kapazität (allg.) $\quad C \equiv \frac{q}{U}$

spez. PK: $\quad C = \frac{S}{4\pi d}$ $\quad$ hängt nur von Geometrie ab

Energie-Dichte $\quad w = \frac{1}{8\pi}E^2 = \frac{(4\pi\sigma)^2}{8\pi} = 2\pi\sigma^2$

Gesamt-En.: $W = w\cdot S\cdot d = 2\pi\sigma^2 S\cdot d$

$$= 2\pi q^2 \frac{d}{S} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q\cdot U = \frac{1}{2} C\cdot U^2$$

1.12. Randwert-Probleme

Erinnerung Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho$$

falls keine weit. RB geg. $\quad \Phi(\underline{r}) = \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|}\, d^3r'$

$\lim_{r\to\infty}\Phi(r) \longrightarrow 0$ $\quad$ spez. (einfache) RB im Unendlichen

$\lim_{r\to\infty}\nabla\Phi(r) \longrightarrow 0$

oft: + $\rho(r)$ in endlichem Volumen V gegeben

+ RB: − $\Phi(\partial V)$ gegeben

− $\nabla\Phi(\partial V)$ gegeben

betr. spez Vektorfeld $\quad A(r) = \rho(r)\cdot\nabla\Psi(r)$

seien stetig diff'bar auf V und ∂V

$$\nabla\cdot A = \nabla\left(\varphi(r)\cdot\nabla\psi(r)\right) = \varphi(r)\,\Delta\psi + (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\psi)$$

$$\int_V \nabla A\, d^3r = \oint_{\partial V} \underline{A}\cdot d\underline{S} = \oint [\varphi(r)\,\nabla\psi(r)]\cdot\underline{n}\, dS$$

$$\boxed{[\nabla\psi]\cdot\underline{n} = \frac{\partial\psi}{\partial n}}$$

"Normalenableitung von ψ auf ∂V

$$\int_V \left[\varphi\,\Delta\psi + (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\psi)\right] d^3r = \oint_{\partial V} \varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\, dS \qquad (1)$$

"1. Greensches Theorem"

$$\int_V \left[\psi\,\Delta\varphi + (\nabla\varphi)(\nabla\psi)\right] d^3r = \oint_{\partial V} \psi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS \qquad (2)$$

(1) − (2): $$\int_V \left[\varphi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\varphi\right] d^3r = \oint_{\partial V} \left(\varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dS$$

"2. Greensches Theorem"

Spez.-fall $\varphi = 1$: $$\int_V \Delta\psi\, d^3r = \oint \frac{\partial\psi}{\partial n}\, dS$$

Randwertproblem der Poisson-Gleichung

+ endl. Volumen V

+ Rand ∂V mit zus. Bedingungen an Φ

$\varphi(r') \longrightarrow \Phi(r')$

$\psi(r') \longrightarrow \dfrac{1}{|r - r'|}$

Parameter

2. Gr.T.: $$\int_V \left[\Phi(r')\,\Delta_{r'}\frac{1}{|r-r'|} - \frac{1}{|r-r'|}\,\Delta_{r'}\Phi(r')\right] d^3r'$$

$$= -4\pi\int_V \Phi(r')\cdot\delta(r-r')\, d^3r' + 4\pi\int \frac{\rho(r')}{|r-r'|}\, d^3r'$$

$$= \oint_{\partial V} \left[\Phi(r')\,\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|r-r'|} - \frac{1}{|r-r'|}\,\frac{\partial\Phi}{\partial n'}\right] dS'$$

falls $r \in V$

$$\Phi(r \in V) = \int_V \frac{\rho(r')}{|r-r'|}\, d^3r' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[\frac{1}{|r-r'|} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi(r') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|r-r'|} \right] dS'$$

wenn $\left.\begin{array}{l} \Phi(\partial V) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\partial V) \end{array}\right\}$ vorgegeben "Cauchy" RB

$\rho(r')$ in V

Problem: $\Phi(\partial V)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\partial V)$ müssen selbstkonsistent bestimmt werden

Klassifikation von RB

+ falls $\Phi(\partial V)$ vorgegeben "Dirichlet" RB
+ falls $\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\partial V)$ " "von-Neumann" RB
+ stückweise Φ oder $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ "gemischte" RB

zeigen: falls entweder $\Phi(\partial V)$ oder $\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\partial V)$ vorgegeben

$\Rightarrow$ Lsg. des RWP eindeutig

Seien $\varphi_1(r)$ und $\varphi_2(r)$ 2 Lsg. des RWP

- $\Delta \varphi_{1/2}(r) = -4\pi \rho(r)$
- Dirichlet $\varphi_1(r) = \varphi_2(r) \quad \forall r \in \partial V$

oder von-Neumann $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}(r) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}(r) \quad \forall r \in \partial V$

$\Rightarrow$ betr. Differenz $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$

$\Delta \psi = 0$

Dirichlet $\psi(\partial V) = 0$

von-N. $\frac{\partial \psi}{\partial n}(\partial V) = 0$

1. Green'sches Theorem

$\varphi = \psi = \psi$

$$\int \left[\psi \underbrace{\Delta \psi}_{0} + (\nabla \psi)(\nabla \psi) \right] d^3r = \oint_{\partial V} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, dS = 0$$

$$\int (\nabla \psi)^2 d^3r = 0 \longrightarrow \nabla \psi = 0$$

$\psi = \text{const.}$

Dirichlet: $\varphi_1 = \varphi_2$

von Neum: $\varphi_1 = \varphi_2 + C$

$\Rightarrow$ Lösung des RWP ist bei Vorg. von entw. Dirichlet oder von-Neumann RB eindeutig