

WdK

• Kramers-Kronig Relationen

$$X(t) \sim \Theta(t)$$

$$\Rightarrow X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{+i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} X(t) e^{+i\omega t} dt$$

$$\omega = \omega_x + i\omega_y$$

$$\Im \omega > 0$$

$\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi \chi(\omega)$  ist holomorph in oberer HF

$$\text{Re } \epsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int \frac{\Im \epsilon(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

$$\Im \epsilon(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int \frac{\text{Re } \epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'$$

• Lösung in Medien

$$\underline{E}(x, \omega) = \underline{E}_0(\omega) e^{-ikx}$$

$$\underline{B}(x, \omega) = \underline{B}_0(\omega) \cdot e^{-ikx}$$

$$\omega \rightarrow \omega^2 = \frac{c^2 k^2}{\epsilon(\omega) \mu(\omega)} \in \mathbb{C}$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad k_i \in \mathbb{C}$$

$$k(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega) \mu(\omega)} \quad \text{best: } \mu(\omega) \approx 1$$

$\text{Re}(\epsilon(\omega))$  &  $\Im(\epsilon(\omega))$  hängen mit Absorptionsverh. zusammen

• Lorentz-Modell  $\epsilon = \sum_i f_i$

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\Gamma_j \omega}$$

$\omega_j^2$  "Resonanzfrequenz"  
 $\Gamma_j$  "Breitening"  
 "Breitening für j-te Elektronenbindung"

7.3.2. Metalle

• bind. ein  $e^-$  ist rel. schwach geb. & frei beweglich

$$\omega_p = 0 \quad \Gamma_j = \Gamma \quad \omega_{j=1,2} > 0$$

$$\epsilon(\omega) = \underbrace{\epsilon_0(\omega)}_{1, j \geq 2} - \underbrace{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_e}}_{j=1} \frac{1}{\omega(\omega + i\Gamma)} \approx \epsilon_0(\omega) + i \frac{4\pi \cdot \delta(\omega)}{\omega}$$

$\omega \ll \Gamma$

"Drude-Modell"

$$\epsilon(\omega) = \frac{k_0 \cdot e^2}{m_e \cdot \Gamma} \frac{1}{1 - i\omega/\Gamma} \approx \frac{k_0 \cdot e^2}{m_e \cdot \Gamma} > 0 \quad \text{"Leitfähigkeit"}$$

$$\nabla \times H + \frac{j\omega}{c} \cdot D_{inh} = \frac{4\pi}{c} \cdot j(r, \omega)$$

$$\nabla \times \frac{B(r, \omega)}{\mu(\omega)} + \frac{j\omega}{c} \left[ \epsilon_0(\omega) + \frac{4\pi G(\omega)}{\omega} \right] \cdot E(r, \omega) = \frac{4\pi}{c} j(r, \omega)$$

$$\nabla \times \frac{B}{\mu} + \frac{j\omega}{c} \epsilon_0(\omega) \cdot E(r, \omega) = \frac{4\pi}{c} \left[ j_0 + \underbrace{G(\omega) \cdot E(r, \omega)}_{j_{ind}} \right]$$

$\omega$  sehr versch von  $\omega_p^2$

$$\epsilon(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\Gamma)}$$

$$\text{Re}(\epsilon) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \Gamma^2} \quad \text{Im} \epsilon \approx \frac{\omega_p^2 \cdot \Gamma}{\omega(\omega^2 + \Gamma^2)}$$

$$G(\omega) = \frac{\omega}{4\pi} \cdot \text{Im} \epsilon(\omega)$$

$$\approx \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega} = \frac{\epsilon_0 \cdot \omega_p^2}{4\pi \cdot \omega}$$

$\omega \ll \Gamma$

$\omega \ll \Gamma$

$$\epsilon \approx 1 + \frac{4\pi G}{\omega} \approx 1 + \frac{4\pi \epsilon_0}{\omega}$$

$$k \approx 1 \quad k = \sqrt{\epsilon(\omega)} \approx \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4\pi \epsilon_0}{\omega}}$$

$$e^{-ikz}$$

$$E = \omega \cdot \epsilon_0 \cdot E_0$$

$$\omega = \epsilon_0 \cdot c$$

$$e^{ikz} = e^{i \epsilon_0 \cdot \omega \cdot z} = e^{i \epsilon_0 c z} = e^{-z/d}$$

$$d = \frac{c}{\sqrt{2} \epsilon_0 \omega} \quad \text{Eindringtiefe in Leitern}$$

"Skin-Effekt"

$\omega \gg \Gamma$

$$\epsilon(\omega) \approx \epsilon_0(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \approx \epsilon_0 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$+ \Gamma \ll \omega < \frac{\omega_p}{\sqrt{\epsilon_0}} \approx \omega_p \rightarrow k(\omega) \text{ wird imaginär} \rightarrow \text{totale Reflexion}$$

Reflexion

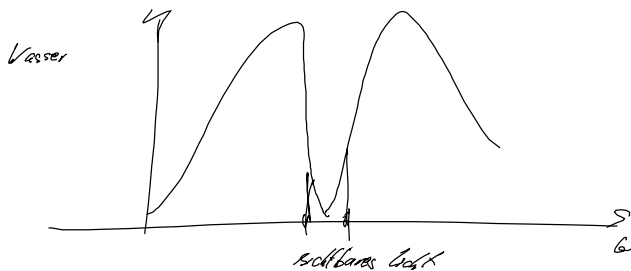
Metalle sind reflektierend  
metallisches Glas

$$+ \Gamma \ll \omega \quad \omega > \frac{\omega_p}{\sqrt{\epsilon_0}} \rightarrow k(\omega) \text{ ist reell}$$

Metall ist transparent

### 7.3.3. Isolatoren

- keine freien  $e^-$   $\omega_i > 0 \quad \forall i$
- $\text{Re}(\omega)$  und  $\text{Im}(\omega)$  sind stark frequenzabhängig



# 7.4. Brechung & Reflexion

## Gesetze der Optik

- in isotropen Medien  $\rightarrow$  Austr. in geradlinigen Strahlen  $\hat{=} \nabla \times \vec{E} = 0$  Wellenvektor gibt Richtung an
- Wege sind umkehrbar  $\hat{=} \vec{k} \rightarrow -\vec{k}$
- an Grenzflächen ( $\mu_1$  &  $\mu_2$ ) gibt es Brechung & Reflexion  $?$
- $\rightarrow$  phys. Gesetze
- Superposition der Intensitäten  $\hat{=} |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2 = |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + \underbrace{\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* + \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_1^*}_{\text{Korrelations-term}}$

Korrelations-term  
versch. n. Mittel f. röh. lokalisierte Quellen

Was passiert an GF?  $\rightarrow$  Stetigkeit aus MKG

•  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{ext}$

$(\underline{D}_2 - \underline{D}_1) \cdot \underline{n} = \rho_{ext}$

$\rho_{ext} \rightarrow$  Flächenladungsdichte

•  $\nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{D} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

$$\iint_F (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{F} = \oint_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{r} = L \underline{e}_z (\underline{H}_2 - \underline{H}_1) = \frac{1}{c} \iint_F d\vec{F} \cdot \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

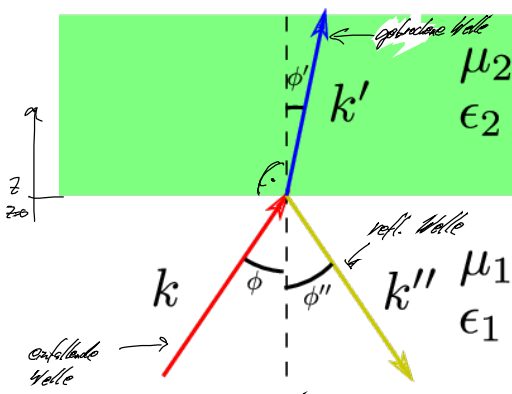
$$\underline{e}_z (\underline{H}_2 - \underline{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{ext} \Rightarrow \underline{e}_z (\underline{H}_2 - \underline{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{ext}$$

hier  $\vec{j}_{ext} = 0$   $\vec{j}_{ext}^{(k)} = 0$

$$\Rightarrow (\underline{D}_2 - \underline{D}_1) \cdot \underline{n} = 0 \quad (\underline{B}_2 - \underline{B}_1) \cdot \underline{n} = 0$$

$$(\underline{H}_2 - \underline{H}_1) \times \underline{n} = 0 \quad (\underline{E}_2 - \underline{E}_1) \times \underline{n} = 0$$

$\underline{n} \cdot \underline{D}$   $\underline{n} \cdot \underline{B}$   
 $\underline{n} \times \underline{E}$   $\underline{n} \times \underline{H}$   
 sind stetig an GF  
 für  $\vec{j}_{ext} = 0$  &  $\vec{j}_{ext} = 0$



$$z < 0: \underline{E} = \underline{E}_0 e^{-i(kz - \omega t)}$$

$$\underline{B} = \frac{1}{c} \underline{E} \times \underline{e}_z$$

$$v = c/n_0$$

$$\underline{E}'' = \underline{E}_0'' e^{-i(k''z - \omega t)}$$

$$\underline{B}'' = \frac{1}{c} \underline{E}'' \times \underline{e}_z$$

$$\frac{E^2}{k^2} = \frac{(E'')^2}{k''^2} = \frac{(E')^2}{k^2} = n_0^2 = \frac{v^2}{c^2}$$

$$z > 0: \underline{E}' = \underline{E}_0' e^{-i(k'z - \omega t)}$$

$$\underline{B}' = \frac{1}{c} \underline{E}' \times \underline{e}_z$$

$$k = n_1 \cdot k_0$$

$$k' = n_2 \cdot k_0$$

$$k'' = n_1 \cdot k_0$$

Einfallsebene sei xz-Ebene

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$E_x \cdot x = E'_x \cdot x \Big|_{z=0} = E''_x \cdot x \Big|_{z=0} = E''_x \cdot x \Big|_{z=0}$$

$$\Rightarrow E'_x = E''_x = 0$$

$$\Rightarrow E_x = E'_x = E''_x$$

$$\underline{E} = E \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \underline{E}' = E' \begin{pmatrix} \sin \varphi' \\ 0 \\ \cos \varphi' \end{pmatrix} \quad \underline{E}'' = E'' \begin{pmatrix} \sin \varphi'' \\ 0 \\ -\cos \varphi'' \end{pmatrix}$$

$$E_x = E'_x \quad E = E''$$

$$E \cdot \sin \varphi = E'' \cdot \sin \varphi'' \quad \Rightarrow \varphi = \varphi'' \quad \text{Einfallswinkel} = \text{Reflexionswinkel} \quad \checkmark$$

Brechung hier  $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$

$$E_x = E'_x \quad \& \quad \frac{E}{n_1} = \frac{E'}{n_2}$$

$$E \cdot \sin \varphi = E' \cdot \sin \varphi'$$

$\frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} = \frac{n_1}{n_2}$	Snellius-Gesetz Brechungsgesetz
--	------------------------------------

• Gültigkeit auch für andere Wellen

\* Polarisation  $\mu_1 = \mu_2 = 1$

$$\underline{n} \cdot \underline{D}: \quad 0 = [n_1 (E_0 + E_0'') - n_2 \cdot E_0'] \cdot \underline{e}_z$$

$$\underline{n} \cdot \underline{B}: \quad 0 = [E \times E_0 + E'' \times E_0' - E' \times E_0'] \cdot \underline{e}_z$$

$$\underline{n} \times \underline{E}: \quad 0 = [E_0 + E_0'' - E_0'] \times \underline{e}_z$$

$$\underline{n} \times \underline{H}: \quad 0 = [E \times E_0 + E'' \times E_0' - E' \times E_0'] \times \underline{e}_z$$

$$\underline{E}_0 = \underline{E}_{0H} + \underline{E}_{0L}$$

↑  
in Einfallsebene

$$\underline{E}_{0H} = E_{0H} \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \underline{E}_{0H}' = E_{0H}' \begin{pmatrix} -\cos \varphi' \\ 0 \\ \sin \varphi' \end{pmatrix} \quad \underline{E}_{0H}'' = E_{0H}'' \begin{pmatrix} \cos \varphi'' \\ 0 \\ \sin \varphi'' \end{pmatrix}$$

$$\frac{E_{0H}'}{E_{0H}} = \frac{2n_1 \cos \varphi}{n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \varphi'}$$

$$\frac{E_{0H}''}{E_{0H}} = \frac{n_2 \cos \varphi - n_1 \cos \varphi'}{n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \varphi'}$$

Fresnel'sche  
Gesetze  
für paral. körp.

Transmission für  $\perp$ -Polarisation

$$T_{\perp}(\omega) = \left| \frac{E_{0H}'}{E_{0H}} \right|^2$$

$$R_{\parallel}(\omega) = \left| \frac{E_{0H}''}{E_{0H}} \right|^2$$

$$R_{\parallel}(\omega) + T_{\perp}(\omega) = 1$$