WdH

- Kramers-Kronig Relationen

$\chi(t) \propto \Theta(t)$

$\Rightarrow \chi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t) e^{+i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \chi(t) e^{+i\omega t} dt$ $\qquad \omega = \omega_x + i\omega_y$, $\mathrm{Im}\,\omega > 0$

$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \chi(\omega)$ ist holomorph in oberer HE

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P}\int \frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P}\int \frac{\mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} \end{aligned}}$$

- Lösungen in Medien

$\underline{E}(\underline{r},\omega) = \underline{E}_0(\omega)\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$ $\qquad \underline{B}(\underline{r},\omega) = \underline{B}_0(\omega) \cdot e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$

$\Rightarrow \omega^2 = \frac{c^2 k^2}{\varepsilon(\omega)\cdot\mu(\omega)} \in \mathbb{C}$ $\qquad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ $\qquad k_i \in \mathbb{C}$

$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)\cdot\mu(\omega)}$ $\qquad$ meist: $\mu(\omega) \approx 1$

$\mathrm{Re}(\varepsilon(\omega))$ & $\mathrm{Im}(\varepsilon(\omega))$ hängen mit Absorptions-verh. zusammen

- Lorentz-Modell $\qquad Z = \sum_j f_j$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \underbrace{\frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}}_{\omega_p^2} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\Gamma_j \omega}$$

Dämpfung

Bindung für j-te Elektronenbindung

"Plasmafrequenz"

7.3.2. Metalle

- mind. ein e^- ist rel. schwach geb. & frei beweglich

$\omega_1 = 0 \qquad \Gamma_1 = \Gamma \qquad \omega_{2,\ldots,N} > 0$

$$\varepsilon(\omega) = \underbrace{\varepsilon_0(\omega)}_{1,\, j\geq 2} - \underbrace{\frac{4\pi n_0 \cdot e^2}{m_e} \frac{1}{\omega(\omega + i\Gamma)}}_{j=1} \equiv \varepsilon_0(\omega) + i\frac{4\pi\cdot\sigma(\omega)}{\omega}$$

"Drude-Modell"

$$\sigma(\omega) = \frac{n_0 \cdot e^2}{m_e \cdot \Gamma} \frac{1}{1 - i\omega/\Gamma} \overset{\omega \ll \Gamma}{\approx} \frac{n_0 \cdot e^2}{m_e \cdot \Gamma} > 0 \quad \text{"Leitfähigkeit"}$$

$$\nabla \times H + \frac{-i\omega}{c} \cdot D(r,\omega) = \frac{4\pi}{c} \cdot j(r,\omega)$$

$$\nabla \times \frac{B(r,\omega)}{\mu(\omega)} + \frac{-i\omega}{c}\left[\varepsilon_0(\omega) + i\frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega}\right]\cdot E(r,\omega) = \frac{4\pi}{c} j_e(r,\omega)$$

$$\nabla \times \frac{B}{\mu} + \frac{-i\omega}{c}\varepsilon_0(\omega)\cdot E(r,\omega) = \frac{4\pi}{c}\left[j_e + \underbrace{\sigma(\omega)\cdot E(r,\omega)}_{j_{ind}}\right]$$

ω sehr weit von $\omega_{j\neq 0}$

$$\varepsilon(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+i\Gamma)} \frac{(\omega-i\Gamma)}{(\omega-i\Gamma)}$$

$$\mathrm{Re}(\varepsilon) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2+\Gamma^2} \qquad \mathrm{Im}\,\varepsilon \approx \frac{\omega_p^2\cdot\Gamma}{\omega(\omega^2+\Gamma^2)} \qquad \sigma(\omega) = \frac{\omega}{4\pi}\cdot \mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)$$

$$\underset{\omega \ll \Gamma}{\approx} \frac{\omega_p^2}{4\pi\Gamma} = \frac{n_0\cdot e^2}{m_e\cdot\Gamma}$$

- $\omega \ll \Gamma$

$$\varepsilon \approx 1 + i\frac{4\pi\sigma}{\omega} \approx i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

$$\mu \approx 1 \qquad n = \sqrt{\varepsilon(\omega)} \approx \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\omega}}$$

$$e^{ikr} \qquad k = n\cdot k_0\cdot e_z$$

$$\omega = k_0\cdot c$$

$$e^{ik\cdot r} = e^{ik_0\cdot n(\omega)\cdot z} = e^{iz/d}\, e^{-z/d} \qquad d = \frac{c}{\sqrt{2\pi\omega\cdot\sigma}}$$ Eindringtiefe in Medium

"Skin-Effekt"

- $\omega \gg \Gamma$

$$\varepsilon(\omega) \approx \varepsilon_0(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \approx \varepsilon_0 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

+ $\Gamma \ll \omega < \frac{\omega_p}{\sqrt{\varepsilon_0}} \approx \omega_p$ → $n(\omega)$ wird imaginär → totale Dämpfung

Reflexion

Metalle sind reflektierend
metallischer Glanz

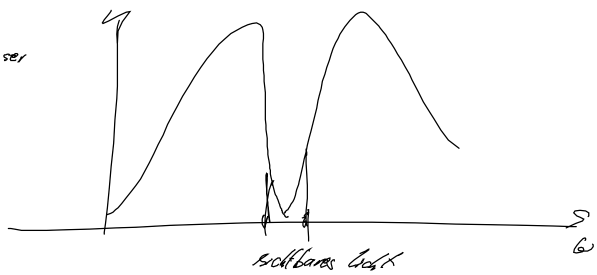
+ $\Gamma \ll \omega \qquad \omega > \frac{\omega_p}{\sqrt{\varepsilon_0}}$ → $n(\omega)$ ist reell

Metall ist transparent

7.3.3. Isolator

- keine freien e^- $\qquad \omega_j > 0 \quad \forall j$
- $\mathrm{Re}(\omega)$ und $\mathrm{Im}(\omega)$ sind stark frequenzabhängig

Wasser



sichtbares Licht

7.4. Brechung & Reflexion

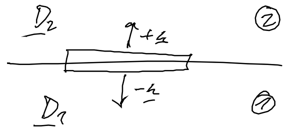
Gesetze der Optik

- in homog. Medien → Ausbr. in geradlinigen Strahlen ⇒ Wellenvektor gibt Richtung an
- Wege sind umkehrbar ⇒ $k \to -k$
- an Grenzflächen (n_1 & n_2) gibt es Brechung & Reflexion ?
  → eig. Gesetze
- Superposition der Intensitäten ⇒ $|E_1 + E_2|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 + \underbrace{E_1 \cdot E_2^* + E_2 \cdot E_1^*}_{\text{Korrekturterm}}$

Korrekturterm verschw. im Mittel für inkoh. natürliche Quellen

Was passiert an GF? → Stetigkeit aus MWG

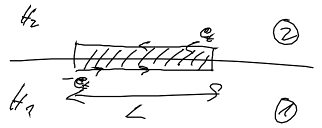
- $\nabla \cdot D = 4\pi\rho$



$$(D_2 - D_1)\cdot n = 4\pi\sigma_{ext}$$

σ: Flächenladungsdichte

- $\nabla \times H - \frac{1}{c}\partial_t D = \frac{4\pi}{c} j$



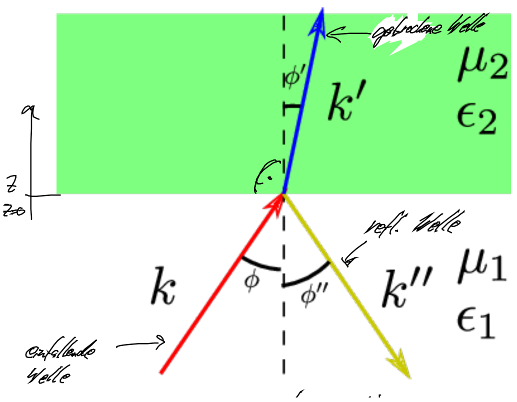
$$\iint_F (\nabla \times H)\, dF = \oint_{\partial F} H \cdot dr = L\, e_t \cdot (H_2 - H_1) = \frac{1}{c}\iint_F dF\, 4\pi j$$

$$e_t \cdot (H_2 - H_1) = \frac{4\pi}{c} j^t_{ext} \quad \Rightarrow \quad n \times (H_2 - H_1) = \frac{4\pi}{c} j_{ext}$$

hier $\sigma_{ext} = 0 \qquad j^{(t)}_{ext} = 0$

$$\Rightarrow \quad (D_2 - D_1)\cdot n = 0 \qquad (B_2 - B_1)\cdot n = 0$$
$$(H_2 - H_1)\times n = 0 \qquad (E_2 - E_1)\times n = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} n\cdot D & n \cdot B & \text{sind stetig an GF} \\ n \times E & n \times H & \text{für } \sigma_{ext} = 0 \;\&\; j_{ext} = 0 \end{array}}$$



$z<0$: $\underline{E} = \underline{E}_0\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$ $\qquad \underline{B} = \frac{1}{k_0}\, \underline{k}\times\underline{E}$ $\qquad \omega = c k_0$

$\underline{E}'' = \underline{E}_0''\, e^{i(\underline{k}''\cdot\underline{r} - \omega t)}$ $\qquad \underline{B}'' = \frac{1}{k_0}\, \underline{k}''\times\underline{E}''$ $\qquad \frac{k^2}{n_1^2} = \frac{(k'')^2}{n_1^2} = \frac{(k')^2}{n_2^2} = k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

$z>0$: $\underline{E}' = \underline{E}_0'\, e^{i(\underline{k}'\cdot\underline{r} - \omega t)}$ $\qquad \underline{B}' = \frac{1}{k_0}\, \underline{k}'\times\underline{E}'$

$k = n_1 \cdot k_0 \qquad k' = n_2 \cdot k_0$

$k'' = n_1 \cdot k_0$

Einfallsebene sei xz-Ebene

$\underline{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} \qquad k_x \cdot x = \underline{k}\cdot\underline{r}\big|_{z=0} = \underline{k}'\cdot\underline{r}\big|_{z=0} = \underline{k}''\cdot\underline{r}\big|_{z=0}$

$\Rightarrow k_y' = k_y'' = 0$

$\Rightarrow k_x = k_x' = k_x''$

$\underline{k} = k \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 0 \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \underline{k}' = k' \begin{pmatrix} \sin\varphi' \\ 0 \\ \cos\varphi' \end{pmatrix} \qquad \underline{k}'' = k'' \begin{pmatrix} \sin\varphi'' \\ 0 \\ -\cos\varphi'' \end{pmatrix}$

$k_x = k_x'' \qquad k = k''$

$k \cdot \sin\varphi = k'' \cdot \sin\varphi'' \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi''$ Einfallswinkel = Ausfallswinkel $\forall\, \omega$

Brechung hier $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$

$k_x = k_x'$ & $\frac{k}{n_1} = \frac{k'}{n_2} \qquad k \cdot \sin\varphi = k' \cdot \sin\varphi'$

$$\boxed{\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi} = \frac{n_1}{n_2}} \quad \text{Snellius-Gesetz, Brechungsgesetz}$$

- Gültigkeit auch für andere Wellen

+ Polarisationen $\mu_1 = \mu_2 = 1$

$\underline{n}\cdot\underline{D}$: $\quad 0 = [\varepsilon_1(\underline{E}_0 + \underline{E}_0'') - \varepsilon_2 \cdot \underline{E}_0'] \cdot \underline{e}_z$

$\underline{n}\cdot\underline{B}$: $\quad 0 = [\underline{k}\times\underline{E}_0 + \underline{k}''\times\underline{E}_0'' - \underline{k}'\times\underline{E}_0'] \cdot \underline{e}_z$

$\underline{n}\times\underline{E}$: $\quad 0 = [\underline{E}_0 + \underline{E}_0'' - \underline{E}_0'] \times \underline{e}_z$

$\underline{n}\times\underline{H}$: $\quad 0 = [\underline{k}\times\underline{E}_0 + \underline{k}''\times\underline{E}_0'' - \underline{k}'\times\underline{E}_0'] \times \underline{e}_z$

$\underline{E}_0 = \underline{E}_{0\parallel} + \underline{E}_{0\perp}$

in Einfallsebene

$$\underline{E}_{0\parallel} = E_{0\parallel} \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \underline{E}'_{0\parallel} = E'_{0\parallel} \begin{pmatrix} -\cos\varphi' \\ 0 \\ \sin\varphi' \end{pmatrix} \qquad \underline{E}''_{0\parallel} = E''_{0\parallel} \begin{pmatrix} \cos\varphi'' \\ 0 \\ \sin\varphi'' \end{pmatrix}$$

$$\frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} = \frac{2 n_1 \cos\varphi}{n_2 \cdot \cos\varphi + n_1 \cdot \cos\varphi'} \qquad \frac{E''_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} = \frac{n_2 \cdot \cos\varphi - n_1 \cdot \cos\varphi'}{n_2 \cdot \cos\varphi + n_1 \cdot \cos\varphi'}$$

Fresnel'sche Gesetze für parall. Komp.

Transmittierter Anteil

$$T_\parallel(\omega) = \left| \frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} \right|^2 \qquad R_\parallel(\omega) = \left| \frac{E''_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} \right|^2$$

$$R_\parallel(\omega) + T_\parallel(\omega) = 1$$