

Schaller

Di 13⁰⁰ - 14⁰⁰

gernot.schaller@tu-berlin.de

EW 744

www.itp.tu-berlin.de/schaller/lectures.html

Inhalt: Elektrostatik Multipolentwicklung / Dielektrika
Magnetostatik Maxwell-Gleichungen
Ebene Wellen Strahlung

Bibel Jackson

Rad. Entf. Greiner / Mötting / Reibhan / Fießbach / Griffiths / Schürger

Mathe Artken "math. methods for physicists"

Vorbemerkungen

Notation & Konventionen

Gradient "Nabla" $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

$\nabla \varphi = \text{grad } \varphi = \begin{pmatrix} \partial_x \varphi \\ \partial_y \varphi \\ \partial_z \varphi \end{pmatrix}$

Divergenz $\nabla \cdot \underline{A} = \text{div } \underline{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z$

Rotation $\nabla \times \underline{A} = \text{rot } \underline{A} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}$$

Grundgleichungen der ED

Gauss-Einkler system

Lösungen

Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{D} &= 4\pi \cdot \rho \\ \nabla \cdot \underline{B} &= 0 \\ \nabla \times \underline{H} &= \frac{4\pi}{c} \underline{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \underline{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

\underline{D} - dielektr. Verschiebung

ρ - Ladungsdichte

\underline{B} - mag. Flussdichte

\underline{H} - mag. Feldstärke

\underline{j} - Stromdichte

c - Lichtgeschwindigkeit

\underline{E} - elektr. Feldstärke

vorgeg.

$$\underline{D} = \underline{\epsilon} \underline{E} \quad \underline{B} = \underline{\mu} \underline{H}$$

meist homogene & isotrope Medien

$$\underline{\epsilon} \rightarrow \epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$$

$$\underline{\mu} \rightarrow \mu = \mu_r \cdot \mu_0$$

Lorentz-Kraft $\underline{F} = q \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \cdot \underline{v} \times \underline{B} \right)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = 0 \quad \text{"Kontinuitätsgleichung"}$$

1. Elektrostatik

$$\bullet \underline{H} = 0 \quad \underline{B} = 0 \quad \partial_t \underline{E} = \partial_t \underline{D} = 0$$

$$\bullet \underline{D} = \underline{\epsilon} \underline{E} \quad \rightarrow \text{in Vakuum}$$

$$\underline{D} = \epsilon_0 \cdot \underline{E} \rightarrow \text{in Gauss-Einheiten} \quad \epsilon_0 = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{D} \cdot \underline{E} = 4\pi \rho \\ \underline{D} \times \underline{E} = 0 \end{array}}$$

1.1. Coulomb-Gesetz (1785)

Kraft zwischen 2 gel. Körpern

- + in der Verb.-linie
- + prop. zu beiden Ladungen
- + fällt mit Quadrat des Abst. ab

$$\underline{F}_{12} = k q_1 \cdot q_2 \frac{\underline{r}_2 - \underline{r}_1}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^3} = k q_1 q_2 \frac{\underline{e}_{12}}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^2}$$

Gauss-System $k = 1 \rightarrow |F| = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$

Einl. der Ladung $[q] = \sqrt{\text{N} \cdot \text{m}^2} = \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^3}{\text{s}^2}}$
"elektrost. Einheit"

SI-System $k_{SI} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$

$$\epsilon_0 = 8.854 \dots \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

Vierzahlkonstante des Vakuums

N Punktladungen: (Gauss)

$$\underline{F}_i = q_i \cdot \sum_{j \neq i} q_j \frac{\underline{r}_i - \underline{r}_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|^3}$$

Feldstärke $\underline{F} = q \cdot \underline{E}$

$$E_i(r) = q_i \frac{\underline{r} - \underline{r}_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3}$$

an Orte \underline{r} $\underline{E}(\underline{r}) = \sum_{i=1}^n E_i(\underline{r}) = \sum_i q_i \frac{\underline{r} - \underline{r}_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3}$

Kontinuierliche Beschreibung $q_i \rightarrow \rho(\underline{r}') d^3 r'$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \int d^3 r' \rho(\underline{r}') \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

zurück $\rho(\underline{r}) = \sum_i q_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$

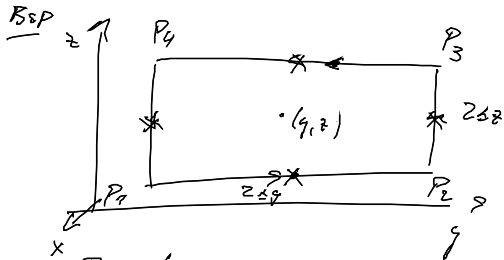
1.2. Integralsätze

1.2.1. Integralsatz von Stokes

$$\oint_{\partial S} \underline{A} \cdot d\underline{r} = \iint_S (\nabla \times \underline{A}) \cdot d\underline{S}$$

∂S $S \leftarrow \text{Fläche}$

\nearrow \downarrow Kompatibilität
 bel. geschl. Kurve in \mathbb{R}^3



$$P_1 = (y - \Delta y, z - \Delta z)$$

$$P_2 = (y + \Delta y, z - \Delta z)$$

$$P_3 = (y + \Delta y, z + \Delta z)$$

$$P_4 = (y - \Delta y, z + \Delta z)$$

kleine Δy Δz

$$\oint_{P_1 \dots P_4} \underline{A} \cdot d\underline{r} = \int_{P_1 P_2} A_y dy + \int_{P_2 P_3} A_z dz + \int_{P_3 P_4} A_y dy + \int_{P_4 P_1} A_z dz$$

$$= A_y(x, y, z - \Delta z) (+2\Delta y) + A_z(x, y + \Delta y, z) (+2\Delta z) + A_y(x, y, z + \Delta z) (-2\Delta y) + A_z(x, y - \Delta y, z) (-2\Delta z)$$

$$+ A_z(x, y + \Delta y, z) (+2\Delta z)$$

$$+ A_y(x, y, z + \Delta z) (-2\Delta y)$$

$$+ A_z(x, y - \Delta y, z) (-2\Delta z)$$

$$= (A_y - \Delta z \cdot \partial_z A_y) (+2\Delta y) + (A_z + \Delta y \cdot \partial_y A_z) (+2\Delta z) + (A_y + \Delta z \cdot \partial_z A_y) (-2\Delta y) + (A_z - \Delta y \cdot \partial_y A_z) (-2\Delta z)$$

$$+ (A_z + \Delta y \cdot \partial_y A_z) (+2\Delta z)$$

$$+ (A_y + \Delta z \cdot \partial_z A_y) (-2\Delta y)$$

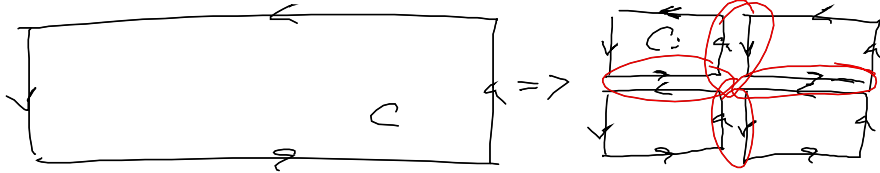
$$+ (A_z - \Delta y \cdot \partial_y A_z) (-2\Delta z)$$

$$= \frac{4 \Delta y \Delta z}{\Delta S} (\partial_y A_z - \partial_z A_y) = \Delta S (\nabla \times \underline{A})_x$$

$$= \underline{dS} \cdot (\nabla \times \underline{A}) \quad \underline{dS} = \underline{\Delta S} \cdot \underline{e_S}$$

$$\underline{n_S} \cdot (\nabla \times \underline{A}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \underline{A} \cdot d\underline{r}$$

Verallgemeinerung



$$\begin{aligned} \oint_C \underline{A} \cdot d\underline{r} &= \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \oint_{C_i} \underline{A} \cdot d\underline{r}_i \\ &= \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \underline{n_{S_i}} \cdot (\nabla \times \underline{A}) \Delta S_i \\ &= \iint_S \underline{n_S} \cdot (\nabla \times \underline{A}) dS = \iint_S (\nabla \times \underline{A}) \cdot \underline{dS} \end{aligned}$$

Satz von Stokes

1.2.2. Integralsatz von Gauss

$$\int_V (\nabla \cdot \underline{A}) d^3r = \iint_{\partial V} \underline{A} \cdot \underline{dS} \quad \text{"Satz von Gauss"}$$

\downarrow \uparrow \downarrow \uparrow
 Volumen \uparrow Vektorfeld ∂V Rand von V

Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche S

$$\begin{aligned} \Phi_S[\underline{A}] &= \iint_S \underline{A}(\underline{r}_i) \cdot \underline{dS} \\ &\approx \sum_i \underline{A}(\underline{r}_i) \cdot \underline{\Delta S}_i \end{aligned}$$

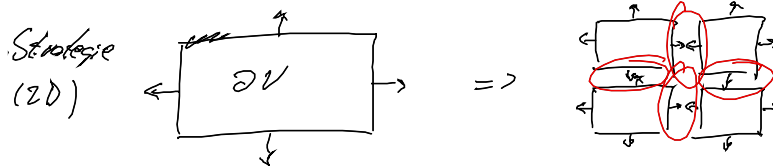
\swarrow \nwarrow
 $= \Delta S_i \cdot \underline{n}_i$ Kleinste Vektor (zeigt nach außen)
 \uparrow
 repräsentiert den Wert von \underline{A} im Flächenelement i

BSP räumlich homog. Vektorfeld

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta S_1 &= \Delta y \cdot \Delta z \cdot \underline{e}_x = -\Delta S_2 \\ \Delta S_3 &= \Delta x \cdot \Delta z \cdot \underline{e}_y = -\Delta S_4 \\ \Delta S_5 &= \Delta x \cdot \Delta y \cdot \underline{e}_z = -\Delta S_6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\oint_{\partial V} \underline{A} d\underline{S} &= \iint dy dz \left[A_x(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) - A_x(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) \right] \\ &+ \iint dx dz \left[A_y(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0) - A_y(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0) \right] \\ &+ \iint dx dy \left[A_z(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2}) - A_z(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2}) \right] \\ &= \iint dy dz \partial_x A_x \cdot \Delta x + \iint dx dz \partial_y A_y \cdot \Delta y + \iint dx dy \partial_z A_z \cdot \Delta z \\ &\rightarrow \Delta V (\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z) \\ &= \Delta V \cdot (\nabla \cdot \underline{A})|_{(x_0, y_0, z_0)}\end{aligned}$$



$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial V} \underline{A} d\underline{S} = \nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}_0)$$

$$\begin{aligned}\oint_{\partial V} \underline{A} d\underline{S} &= \sum_i \oint_{\partial V_i} \underline{A} d\underline{S}_i = \sum_i \Delta V_i (\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}_i)) \\ &= \int_V (\nabla \cdot \underline{A}) d^3r\end{aligned}$$

"verallg. Integralsatz von Stokes"