

Wdh allg. Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho_{\text{ext}}$$

↑  
elektr. Feld                  ↓  
   Ladungsdichte

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$\vec{E} = q \vec{E}$  i-te Ladung    Ort der i-ten Punktladung

$$\vec{E}(\underline{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \frac{\underline{r} - \underline{r}_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3} = \sum_i q_i \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^2} \underline{e}_i$$

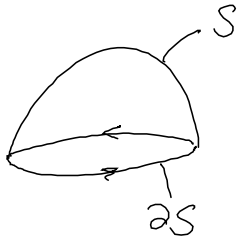
↑  
Ort der Testladung

Kontinuum:  $q_i \rightarrow \rho(\underline{r}_i) \cdot d^3r_i$      $\sum \rightarrow \int$

$$\vec{E}(\underline{r}) = \int \frac{\rho(\underline{r}') (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} d^3r'$$

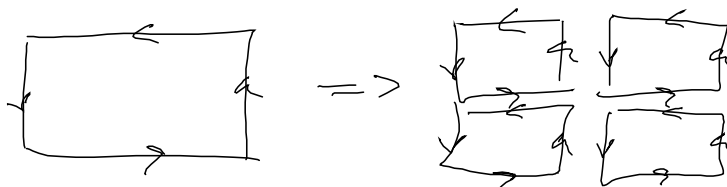
Integralsätze

a.) Stokes  $\oint_{\partial S} \underline{A} \cdot d\underline{r} = \iint_S (\nabla \times \underline{A}) \cdot d\underline{S}$



b.) Gauss

$$\oint_{\partial V} \underline{A} \cdot d\underline{S} = \int_V (\nabla \cdot \underline{A}) \cdot d^3r$$



### 1.3. Stromdichte

Ladung sämtlicher Körper ist ein ganzzahliges Vielfaches von  $e$

$$Q = n \cdot e \quad n \in \mathbb{Z}$$

Benannte Ladungen führen zu einem elektr. Strom

$$\text{Stromdichte} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}$$

$$[j] = \frac{C}{s \cdot m^2} = \frac{A}{m^2}$$

$n$  Teilchen, Geschw.  $v$

$$j = \frac{N}{V} \cdot q \cdot v = \rho \cdot v$$

$$I_S [j] = \iint_S \underline{j} \cdot d\underline{S} \quad [I] = A$$

$$\iint_{\partial V} (\underline{v} \times \underline{A}) \cdot d\underline{S} = \int_V \underline{v} \cdot (\nabla \times \underline{A}) d^3v = 0$$

$$\underline{I}_V = \oiint_{\partial V} \underline{j} \cdot d\underline{S}$$

Gesamtstrom aus  $V$  heraus

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3v}_{\frac{\partial q_V}{\partial t}} + \oiint_{\partial V} \underline{j} \cdot d\underline{S} = 0$$

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} \right) d^3r = 0$$

für bel. Volumen  $V$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = 0$$

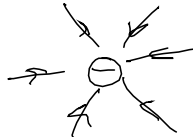
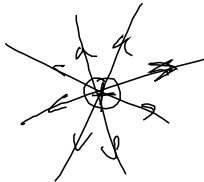
Kontinuitätsgleichung

### 1.4. Feldlinien

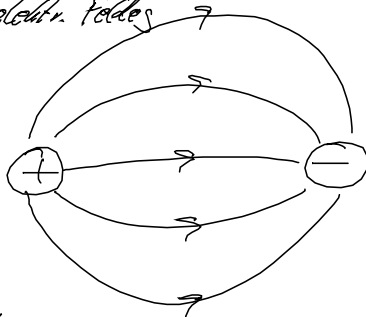
Visualisierung des elektr. Feldes

Richtung, in welche sich ein pos. geladener Testkörper in elektr. Feld bewegt  
 $E$  tangential an den Feldlinien an

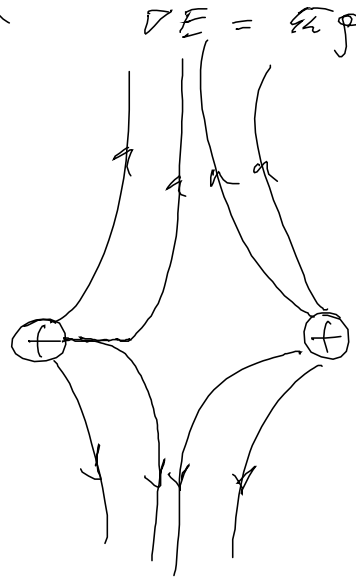
Punktladung



pos. Ladungen  
sind die Quellen  
des elektr. Feldes



Senken



Matlab

StreamPlot VectorPlot

### 1.5. Potentiale

haben  $E(r) = \int \frac{\rho(r') (r-r')}{|r-r'|^3} d^3 r' \quad \underline{F} = q \underline{E}$

$$\frac{r-r'}{|r-r'|^3} = -\nabla \frac{1}{|r-r'|}$$

$$\frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \\ z-z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \frac{-1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}}$$

$E(r) = -\nabla \Phi(r) \leftarrow$  Potential

$\Phi(r) = \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|} d^3 r'$

+ nicht eindeutig (Erhaltung)

$\Rightarrow$  Analogie zur Mechanik  $F = -\nabla V \quad U = q \cdot \Phi$   
Coulomb-Kraft ist konservativ

Potentialdifferenz

$\Phi(r) - \Phi(r_0) = - \int_{r_0}^r E(r') \cdot dr'$

"Spannung"  $\int_{r_0}^r$  Weg ist egal  
[ $\Phi$ ] = V Volt

mehrere Ladungen

$\rho(r') = \sum_{i=1}^N q_i \delta(r-r_i)$

$\Rightarrow \Phi(r) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|r-r_i|}$

### 1.6 Darstellung der 3d $\delta$ -Funktion

$$\delta(\underline{r}-\underline{r}') = \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z')$$

$$\left[ \delta(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right]$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \\ &= \text{div grad} \\ &= \nabla \cdot \nabla \end{aligned}$$

betrachte  $\underline{r} \neq \underline{r}'$

$$\begin{aligned} -\Delta \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} &= -\nabla \cdot \left( \nabla \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right) = \nabla \cdot \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \left( \nabla(\underline{r}-\underline{r}') \right) + (\underline{r}-\underline{r}') \cdot \left( \nabla \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \right) \\ &= \frac{3}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} - 3(\underline{r}-\underline{r}') \cdot \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^4} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^2} \\ &= 0 \quad (\underline{r} \neq \underline{r}') \end{aligned}$$

Forderung  $\int_V \delta(\underline{r}-\underline{r}') d^3r = \begin{cases} 1 & \text{falls } \underline{r}' \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\underline{I} = \int_V \Delta \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3r = \int_V \Delta_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3r$$

$\underline{r} = \underline{r} - \underline{r}'$

Fall  $\underline{r}'$  ist in  $V$  enthalten

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \int_{V \subset \mathbb{R}^3} \nabla \cdot \left( \nabla \frac{1}{r} \right) d^3r = \oint_{\partial V} \left( -\frac{1}{R^2} \underline{e}_r \right) d\underline{S} \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-1}^{+1} R^2 \sin\vartheta \underline{e}_r \cdot \left( -\frac{1}{R^2} \underline{e}_r \right) \\ &= 2\pi(-1) \int_{-1}^{+1} dx = -4\pi \end{aligned}$$

$$\int_V \Delta \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3r = \begin{cases} -4\pi & \text{falls } \underline{r}' \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

→ Divst. gezeigt

## 1.7. Grundgleichungen der Elektrostatik

Fluss durch eine Volumen-Oberfläche

$$\begin{aligned}\oint_{\partial V} \underline{E} \cdot d\underline{S} &= \int d^3v' \rho(r') \oint \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \cdot d\underline{S} \\ &= - \int d^3v' \rho(r') \oint_{\partial V} \left( \nabla \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right) \cdot d\underline{S} && \text{Gauss'scher } \nabla\text{-Satz} \\ &= - \int d^3v' \rho(r') \int_V \Delta \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3v' && \text{div grad} = \Delta \\ &= - \int d^3v' \rho(r') \cdot (-4\pi) \int \delta(\underline{r}-\underline{r}') d^3v' \\ &= 4\pi \int_V \rho(r') d^3v' = 4\pi \cdot q_V\end{aligned}$$

ausdrücken

$$\int_V [\nabla \cdot \underline{E} - 4\pi \rho(r)] d^3v = 0$$

$V \leftarrow$  beliebig

$$\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi \rho(r) \quad \text{differentialle Form}$$

$$0 = \int_S (\nabla \times \underline{E}) \cdot d\underline{S} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial S} \underline{E} \cdot d\underline{r}$$

$$\nabla \times \underline{E} = 0 \quad \oint_{\partial S} \underline{E} \cdot d\underline{r} = 0$$

Grundgleichungen der ES

$$\oint_{\partial V} \underline{E} \cdot d\underline{S} = 4\pi \cdot q_V$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi \rho$$

$$\oint_{\partial S} \underline{E} \cdot d\underline{r} = 0 \quad \text{integrale Form}$$

$$\nabla \times \underline{E} = 0 \quad \text{diff. Form}$$

$$E = -\nabla \Phi$$

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \Delta \Phi = -4\pi \rho(r) \quad \text{fundamentale } \nabla$$

Poisson-Gleichung

a)  $\Phi(r) = \int d^3r' \frac{\rho(r')}{|r-r'|}$  nicht eindeutig

• nur eine Lösung für den Spezialfall fehlender RB

$$\Delta \Phi = \int d^3r' \rho(r') \Delta \frac{1}{|r-r'|} = -4\pi \int d^3r' \rho(r') \delta(r-r')$$

$$= -4\pi \rho(r) \quad \checkmark$$

b.) Voraussetzung: Randbedingungen vorgegeben

Merke: allg. Lösung lässt sich konstr. aus der allg. Lösung des homogenen Problems

$$\Delta \Phi(r) = 0 \quad \text{"Laplace-Gleichung"}$$

andere spezielle Lösung der Poisson-Gl.

### 1.8. Elektrostat. Feldenergie

elekt. Feld enthält Energie

Wie bestimmen

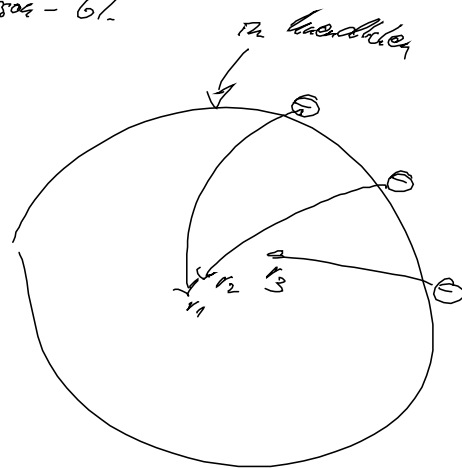
$$F_{ij} = q \cdot E(r)$$

$$W_{AB} = - \int_{r_A}^{r_B} F dr$$

$$= -q \int_{r_A}^{r_B} E dr$$

$$= +q \int_{r_A}^{r_B} (\nabla \Phi) \cdot dr = q [\Phi(r_B) - \Phi(r_A)] = q \cdot U_{AB}$$

$$-E dr = (\partial_x \Phi) dx + (\partial_y \Phi) dy + (\partial_z \Phi) dz = d\Phi$$



Spannung  
zur AB

Punktladungen  $1, \dots, (i-1)$  seien schon an ihren Bestimmungsorten  
Frage die  $i$ -te Punktladung hat?

Potential der  $(i-1)$  Ladungen an Orte der  $i$ -ten PL

$$\Phi(r_i) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|r_i - r_j|} \rightarrow 0$$

$$W_i = q_i [\Phi(r_i) - \Phi(\infty)] = q_i \cdot \Phi(r_i)$$

Gesamt-Arbeit für  $N$ -PL

$$W = \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|r_i - r_j|} = \sum_{\substack{i>j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{|r_i - r_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|r_i - r_j|}$$

1. Ladung kostet nichts

Kontinuum Limes  $W = \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' \frac{\rho(r) \rho(r')}{|r - r'|}$   
 $= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(r) \cdot \Phi(r)$

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{8\pi} \int d^3r (\nabla \Phi) \cdot \nabla \Phi = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r [\nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi)] \int \Phi \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) + \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\nabla \Phi)^2 \\ &= -\frac{1}{8\pi} \oint_{\partial V \rightarrow \infty} (\Phi \nabla \Phi) \cdot dS + \frac{1}{8\pi} \int d^3r |E|^2 \end{aligned}$$

für große  $r$   $\Phi \propto \frac{1}{r}$   
 $\Phi \nabla \Phi \propto \frac{1}{r^3}$   
 $dS \propto r^2$

$$W = \frac{1}{8\pi} \int |E(r)|^2 d^3r = \int \omega(r) d^3r$$

$$\omega(r) = \frac{1}{8\pi} |E(r)|^2$$

Energie dichte des elektr. Feldes