English Summary:

4.3 Quantization of radiation field

Lagrange density $\mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}, \partial_k \psi, t) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \underline{E} \cdot \underline{E} - \frac{1}{\mu_0} \underline{B} \cdot \underline{B}\right)$

Lagrange functional $L = \int d^3r \, \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}, \partial_k \psi, t)$

Lagrange eqs. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \sum_{k=1}^{3} \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \psi)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} = 0}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{field} \quad \psi_k(\underline{r}, t) = A_k(\underline{r}, t) \\ \text{conj. field} \quad \pi_k(\underline{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_k} = \varepsilon_0 \dot{A}_k = -\varepsilon_0 E_k \end{array}}$$

field op. $[\hat{\psi}(\underline{r}), \hat{\pi}(\underline{r}')] = i\hbar \, \delta(\underline{r} - \underline{r}')$ $\quad \boxed{[\hat{A}_k(\underline{r}), \hat{\pi}_{k'}(\underline{r}')] = i\hbar \, \delta_{kk'} \, \delta(\underline{r} - \underline{r}')}$

4.3.3 Modenentwicklung für freien Raum

Lösung der Wellengl. $\Box \underline{A}(\underline{r}, t) = 0$

Separationsansatz:

$$\boxed{\hat{A}_k(\underline{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \sum_\lambda c_\lambda A_{\lambda k}(\underline{r}) \, \hat{q}_\lambda(t)} \qquad (3)$$

↳ Lösung der Helmholtz-Gl.

$$\Delta A_{\lambda k} + \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} A_{\lambda k} = 0$$

↑ z.B. ebene Welle

für $\hat{q}_\lambda$ bleibt Bewegungsgl.

$$\boxed{\ddot{\hat{q}}_\lambda + \omega_\lambda^2 \hat{q}_\lambda = 0} \quad \hat{=} \text{ Oszillatorgl.}$$

kan. konj. Feld $\quad \varepsilon_0 \dot{\hat{A}}_k(\underline{r}, t) = \sqrt{\varepsilon_0} \sum_\lambda c_\lambda A_{\lambda k}(\underline{r}) \, \dot{\hat{q}}_\lambda(t)$

$$\boxed{\hat{\pi}_k(\underline{r}, t) = \sqrt{\varepsilon_0} \sum_\lambda c_\lambda A_{\lambda k}(\underline{r}) \, \hat{p}_\lambda(t)} \qquad \hat{p}_\lambda \equiv \dot{\hat{q}}_\lambda$$

$A_{\lambda k}(\underline{r})$ bilden ein ONS : $c_\lambda c_{\lambda'} \int d^3r \, A_{\lambda k}(\underline{r}) A_{\lambda' k}(\underline{r}) = \delta_{\lambda \lambda'}$

$$\Rightarrow \hat{q}_\lambda = \sqrt{\varepsilon_0} \, c_\lambda \int d^3r \, A_{\lambda k}(\underline{r}) \, \hat{A}_k(\underline{r}, t)$$

$$\hat{p}_\lambda = \frac{c_\lambda}{\sqrt{\varepsilon_0}} \int d^3r \, A_{\lambda k}(\underline{r}) \, \hat{\Pi}_k(\underline{r},t)$$

Einsetzen von $\hat{A}_k$ und $\hat{\Pi}_k$ in H:

$$\Rightarrow \boxed{\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_\lambda \left(\hat{p}_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 \hat{q}_\lambda^2\right)}$$

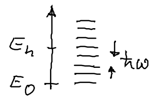
Strahlungsfeld entspricht einem System aus unendlich vielen harmon. Osz.!

Vertauschungsrel. von $\hat{p}, \hat{q}$:

$$[\hat{q}_\lambda, \hat{p}_{\lambda'}] = c_\lambda c_{\lambda'} \int d^3r \int d^3r' \, A_{\lambda k}(\underline{r}) A_{\lambda' k'}(\underline{r}') \underbrace{[\hat{A}_k(\underline{r}), \hat{\Pi}_{k'}(\underline{r}')]}_{i\hbar \delta_{kk'} \delta(\underline{r}-\underline{r}')}$$

$$= i\hbar \, \delta_{\lambda\lambda'}$$

Formulierung durch Erzeugungs- u. Vernichtungsop.



Einführung neuer Op. a_λ, a_λ^+: Vernichter oder Erzeuger eines Photons der Mode λ

$$H a^+|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)|n+1\rangle$$

Wir definieren
$$\hat{a}_\lambda = \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\hbar}}\, \hat{q}_\lambda + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_\lambda}}\, \hat{p}_\lambda$$
$$\hat{a}_\lambda^+ = \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\hbar}}\, \hat{q}_\lambda - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_\lambda}}\, \hat{p}_\lambda$$

$$\hat{q}_\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\lambda}}\,(\hat{a}_\lambda + \hat{a}_\lambda^+)$$
$$\hat{p}_\lambda = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2}}\,(\hat{a}_\lambda - \hat{a}_\lambda^+)$$

$$\boxed{\hat{H} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \left(\hat{n}_\lambda + \frac{1}{2}\right)}$$

Photonenzahlop. $\boxed{\hat{n}_\lambda = \hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_\lambda}$

Vertauschungsrel. von $\hat{a}_\lambda^+$, $\hat{a}_\lambda$:

$$[\hat{a}_\lambda, \hat{a}_{\lambda'}^+] = \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$[\hat{a}_\lambda, \hat{a}_{\lambda'}] = [\hat{a}_\lambda^+, a_{\lambda'}^+] = 0$$

$\Rightarrow$ Photonen sind Bosonen

Zeitentw.
$$\dot{\hat{a}}_\lambda = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{a}_\lambda]$$
$$\dot{\hat{a}}_\lambda = i\omega_\lambda \hat{a}_\lambda \quad \Rightarrow \quad \hat{a}_\lambda(t) = \hat{a}_\lambda(0)\, e^{i\omega_\lambda t}$$

Felder

$$\boxed{\begin{aligned}
\hat{A}_k &= \sum_\lambda \tilde{A}_{\lambda k}(\underline{r}) \, (\underbrace{\hat{a}_\lambda}_{\sim e^{i\omega_\lambda t}} + \underbrace{\hat{a}_\lambda^+}_{e^{-i\omega_\lambda t}}) \\
\hat{E}_k &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\hat{\Pi}_k = \sum_\lambda i\omega_\lambda \tilde{A}_{\lambda k}\,(\hat{a}_\lambda - \hat{a}_\lambda^+) \\
\hat{B}_k &= \epsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x_i} A_j = \sum_\lambda \epsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{A}_{\lambda j}(\underline{r})\,\hat{a}_\lambda + \text{c.c.}
\end{aligned}}$$

nur eine Mode in x-Richtung:

$$\hat{A} = \tilde{A}(x)\, a_\lambda(0)\, e^{i\omega_\lambda t} + \tilde{A}^*(x)\, a_\lambda^+(0)\, e^{-i\omega_\lambda t}$$

4.4 Quantenzustände des Lichtes

oBdA einmodiges Feld: $H = \hbar\omega(\hat{n} + \frac{1}{2})$

4.4.1 Fock-Zustände = Photonzahlzustände

Eigenzustände von $\hat{n}$: $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$

und somit auch zu $\hat{H}$: $\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})|n\rangle$

Erzeugung von $|n\rangle$: n-malige Anwendung von $\hat{a}^+$ auf Vakuumzustand

$$\boxed{|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle}$$

aus Normierung $\langle n|n\rangle = 1$

Wirkung von $\hat{a}, \hat{a}^+$: $\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

Jeder reine Zustand $|\psi\rangle$ lässt sich nach $|n\rangle$ entwickeln:

$$|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle \underbrace{\langle n|\psi\rangle}_{c_n}$$

$|\langle n|\psi\rangle|^2$: Wahrscheinlichkeit, n Photonen zu registrieren

- Photonenzahlstatistik im reinen Fock-Zustand

$$\langle\hat{n}\rangle = \langle n|\hat{n}|n\rangle = \langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,\langle n|\hat{a}^+|n-1\rangle = n\langle n|n\rangle = n$$

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle \equiv \langle(\hat{n}-n)^2\rangle = \langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2 = \langle a^+ a a^+ a\rangle - n^2 = 0$$ scharf (Eigenwert)

- Feldstärkestatistik im Fockzustand

$$\hat{E} = C\hat{a} + C^*\hat{a}^+$$

Mittelwert $\langle n|\hat{E}|n\rangle = C\underbrace{\langle n|\hat{a}|n\rangle}_{0} + C^*\underbrace{\langle n|\hat{a}^+|n\rangle}_{0} = 0$

Varianz $$\langle(\Delta\hat{E})^2\rangle = C^2\underbrace{\langle\hat{a}^2\rangle}_{0} + C^{*2}\underbrace{\langle(\hat{a}^+)^2\rangle}_{0} + |C|^2\underbrace{\langle(\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a})\rangle}_{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\sqrt{n}} - \underbrace{\langle\hat{E}\rangle^2}_{0}$$

$$= |C|^2(2n+1)$$

$$= |C|^2(2\langle n\rangle + 1)$$

Bem.
- Schwankung nimmt mit wachsender Photonenzahl zu
- Im Vakuumzustand $|0\rangle$ verschwindet die Schwankung nicht

$\Rightarrow$ spontan. Emission

- Quadraturkomponenten
  (orthogonale Komp.)

  — definiere normierte Orts- und Impulsop. $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ (Anf. bed.)

$$\hat{x}_1 = \hat{a}(0) + \hat{a}^+(0)$$

$$\hat{x}_2 = i\left(\hat{a}(0) - \hat{a}^+(0)\right)$$

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = 2i\,[\hat{a}^+, \hat{a}]$$

Unschärferelation $\Delta\hat{x}_1\,\Delta\hat{x}_2 \geq 1$ $\qquad \langle n|\hat{x}_1|n\rangle = 0$

$\langle n|\hat{x}_2|n\rangle = 0$

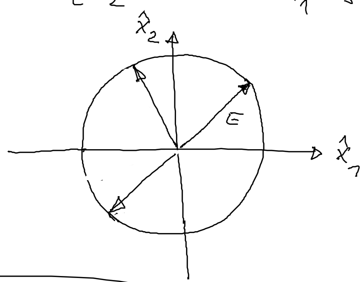
im Vakuumzust. gilt $\Delta\hat{x}_1\,\Delta\hat{x}_2 = 1$ (minimale Unschärfe)

Darstellung der Feldstärke durch $\hat{x}_1, \hat{x}_2$:

$$\hat{E} = C\big(\underbrace{\hat{a}(0)}_{=\frac{\hat{x}_2 + i\hat{x}_1}{2i}} e^{i\omega t} + \underbrace{\hat{a}^+}_{=\frac{-\hat{x}_2 + i\hat{x}_1}{2i}} e^{-i\omega t}\big)$$

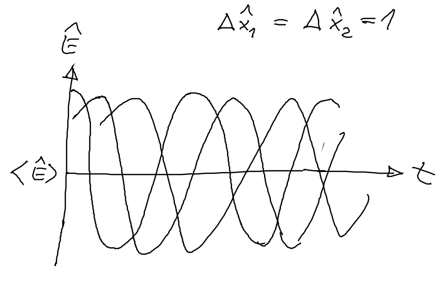
$$= C\left[\hat{x}_2\left(\frac{e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}}{2i}\right) + i\hat{x}_1\left(\frac{e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}}{2i}\right)\right]$$

$$= -C\left[\hat{x}_2 \sin\omega t + \hat{x}_1 \cos\omega t\right]$$



Koord. system durch Anf. bed. definiert

$\Delta\hat{x}_1 = \Delta\hat{x}_2 = 1$



$$\boxed{\text{Amplitude des } \hat{E}\text{-Feldes ist fest, aber Phase ist unbestimmt}}$$

Resultat: Fock-Zustand ist maximal nichtklassisch