

English Summary:

4.3 Quantization of radiation field

Lagrange density $\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \partial_k \varphi, t) = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B})$

Lagrange functional $L = \int d^3r \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \partial_k \varphi, t)$

Lagrange eqs. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \sum_{k=1}^3 \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \Delta A - \frac{1}{c^2} \ddot{A} = 0$

field $\varphi_k(\mathbf{r}, t) = A_k(\mathbf{r}, t)$

conj. field $\pi_k(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_k} = \epsilon_0 \dot{A}_k = -\epsilon_0 E_k$

field op. $[\hat{\varphi}(\mathbf{r}), \hat{\pi}(\mathbf{r}')] = i\hbar \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$

$[\hat{A}_k(\mathbf{r}), \hat{\pi}_{k'}(\mathbf{r}')] = i\hbar \delta_{kk'} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$

4.3.3 Modenentwicklung für freien Raum

Lösung der Wellenagl. $\square A(\mathbf{r}, t) = 0$

Separationsansatz:

$\hat{A}_k(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_{\lambda} c_{\lambda} A_{\lambda k}(\mathbf{r}) \hat{q}_{\lambda}(t)$ (3)

↳ Lösung der Helmholtz-Gl.

$\Delta A_{\lambda k} + \frac{\omega_{\lambda}^2}{c^2} A_{\lambda k} = 0$

↑
z.B. ebene Welle

für \hat{q}_{λ} bleibt Bewegungsgl.

$\ddot{\hat{q}}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 \hat{q}_{\lambda} = 0 \hat{=} \text{Oszillatorgl.}$

kan. konj. Feld $\epsilon_0 \dot{\hat{A}}_k(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\epsilon_0} \sum_{\lambda} c_{\lambda} A_{\lambda k}(\mathbf{r}) \dot{\hat{q}}_{\lambda}(t)$

$\hat{\pi}_k(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\epsilon_0} \sum_{\lambda} c_{\lambda} A_{\lambda k}(\mathbf{r}) \hat{p}_{\lambda}(t)$ $\hat{p}_{\lambda} \equiv \dot{\hat{q}}_{\lambda}$

$A_{\lambda k}(\mathbf{r})$ bilden ein ONS: $c_{\lambda} c_{\lambda'} \int d^3r A_{\lambda k}(\mathbf{r}) A_{\lambda' k}(\mathbf{r}) = \delta_{\lambda \lambda'}$

$\Rightarrow \hat{q}_{\lambda} = \sqrt{\epsilon_0} c_{\lambda} \int d^3r A_{\lambda k}(\mathbf{r}) \hat{A}_k(\mathbf{r}, t)$

$$\hat{P}_\lambda = \frac{c^2}{\sqrt{\epsilon_0}} \int d^3r A_{\lambda k}(\mathbf{r}) \hat{\Pi}_{\lambda k}(\mathbf{r}, t)$$

Einsetzen von \hat{A}_k und $\hat{\Pi}_k$ in H :

$$\Rightarrow \boxed{\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} (\hat{P}_{\lambda}^2 + \omega_{\lambda}^2 \hat{q}_{\lambda}^2)}$$

Strahlungsfeld entspricht einem System aus unendlich vielen harmon. Osz.!

Vertauschungsrel. von \hat{p}, \hat{q} :

$$[\hat{q}_{\lambda}, \hat{p}_{\lambda'}] = \frac{c}{\omega_{\lambda}} \frac{c}{\omega_{\lambda'}} \int d^3r \int d^3r' A_{\lambda k}(\mathbf{r}) A_{\lambda' k'}(\mathbf{r}') \underbrace{[\hat{A}_k(\mathbf{r}), \hat{\Pi}_{k'}(\mathbf{r}')]}_{i\hbar \delta_{kk'} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$$

$$= i\hbar \delta_{\lambda\lambda'}$$

Formulierung durch Erzeugungs- u. Vernichtungsop.



Einführung neuer Op. $a_{\lambda}, a_{\lambda}^+$: Vernichtet oder Erzeugt eines Photons der Mode λ

$$H a^+ |n\rangle = (E_n + \hbar\omega) |n+1\rangle$$

$$\text{Wir definieren } \left. \begin{aligned} \hat{a}_{\lambda} &= \sqrt{\frac{\omega_{\lambda}}{2\hbar}} \hat{q}_{\lambda} + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\lambda}}} \hat{p}_{\lambda} \\ \hat{a}_{\lambda}^+ &= \sqrt{\frac{\omega_{\lambda}}{2\hbar}} \hat{q}_{\lambda} - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\lambda}}} \hat{p}_{\lambda} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \hat{q}_{\lambda} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\lambda}}} (\hat{a}_{\lambda} + \hat{a}_{\lambda}^+) \\ \hat{p}_{\lambda} &= -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\lambda}}{2}} (\hat{a}_{\lambda} - \hat{a}_{\lambda}^+) \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{H} = \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda} (\hat{n}_{\lambda} + \frac{1}{2})} \quad \text{Photonenzahl op. } \boxed{\hat{n}_{\lambda} = \hat{a}_{\lambda}^+ \hat{a}_{\lambda}}$$

Vertauschungsrel. von $\hat{a}_{\lambda}^+, \hat{a}_{\lambda}$:

$$[\hat{a}_{\lambda}, \hat{a}_{\lambda'}^+] = \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$[\hat{a}_{\lambda}, \hat{a}_{\lambda'}] = [\hat{a}_{\lambda}^+, \hat{a}_{\lambda'}^+] = 0$$

\Rightarrow Photonen sind Bosonen

Zeitentw. $\dot{\hat{a}}_{\lambda} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{a}_{\lambda}]$

$$\dot{\hat{a}}_{\lambda} = i\omega_{\lambda} \hat{a}_{\lambda} \Rightarrow \hat{a}_{\lambda}(t) = \hat{a}_{\lambda}(0) e^{i\omega_{\lambda} t}$$

Felder

$$\hat{A}_k = \sum_{\lambda} \tilde{A}_{\lambda k}(\mathbf{r}) (\hat{a}_{\lambda} + \hat{a}_{\lambda}^+)$$

$\underbrace{\quad}_{\sim e^{i\omega_{\lambda} t}} \quad \underbrace{\quad}_{\sim e^{-i\omega_{\lambda} t}}$

$$\hat{E}_k = -\frac{1}{\epsilon_0} \hat{\Pi}_k = \sum_{\lambda} i\omega_{\lambda} \tilde{A}_{\lambda k}(\mathbf{r}) (\hat{a}_{\lambda} - \hat{a}_{\lambda}^+)$$

$$\hat{B}_k = \epsilon_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} A_j = \sum_{\lambda} \epsilon_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{A}_{\lambda j}(\mathbf{r}) \hat{a}_{\lambda} + c.c.$$

nur eine Mode in x-Richtung:

$$\hat{A} = \hat{A}(x) a_{\lambda}(0) e^{i\omega_{\lambda}t} + \hat{A}^*(x) a_{\lambda}^{\dagger}(0) e^{-i\omega_{\lambda}t}$$

4.4 Quantenzustände des Lichtes

obdA einmodiges Feld: $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{n} + \frac{1}{2})$

4.4.1 Fock-Zustände = Photonenzustände

Eigenzustände von \hat{n} : $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$
 und somit auch zu \hat{H} : $\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle$

Erzeugung von $|n\rangle$: n-malige Anwendung von \hat{a}^{\dagger} auf Vakuumzustand

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^{\dagger})^n |0\rangle$$

↑ aus Normierung $\langle n|n\rangle = 1$

Wirkung von $\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}$: $\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
 $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$

Jeder reine Zustand $|\psi\rangle$ lässt sich nach $|n\rangle$ entwickeln:

$$|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle \underbrace{\langle n|\psi\rangle}_{c_n}$$

$|\langle n|\psi\rangle|^2$: Wahrscheinlichkeit, n Photonen zu registrieren

- Photonenzahlstatistik im reinen Fock-Zustand

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle n|\hat{n}|n\rangle = \langle n|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n} \langle n|\hat{a}^{\dagger}|n-1\rangle = n \langle n|n\rangle = n$$

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle \equiv \langle (\hat{n} - n)^2 \rangle = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 = \langle \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{a} \rangle - n^2 = 0 \quad \text{schief (Eigenwert)}$$

- Feldstärkestatistik im Fockzustand

$$\hat{E} = C\hat{a} + C^*\hat{a}^{\dagger}$$

$$\text{Mittelwert } \langle n|\hat{E}|n\rangle = C \underbrace{\langle n|\hat{a}|n\rangle}_0 + C^* \underbrace{\langle n|\hat{a}^{\dagger}|n\rangle}_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Varianz } \langle (\Delta \hat{E})^2 \rangle &= C^2 \underbrace{\langle \hat{a}^2 \rangle}_0 + C^{*2} \underbrace{\langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle}_0 + |C|^2 \underbrace{\langle \hat{a}\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}^{\dagger}\hat{a} \rangle}_{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\sqrt{n}} - \underbrace{\langle \hat{E} \rangle^2}_0 \\ &= |C|^2 (2n+1) \\ &= |C|^2 (2\langle n \rangle + 1) \end{aligned}$$

- Bem.
- Schwankung nimmt mit wachsender Photonenzahl $2n$
 - Im Vakuumzustand $|0\rangle$ verschwindet die Schwankung nicht
- \Rightarrow spontan. Emission

- Quadraturkomponenten
(orthogonale Komp.)

– definiere normierte Orts- und Impulsop. \hat{x}_1, \hat{x}_2 (Auf. bed.)

$$\hat{x}_1 = \hat{a}(0) + \hat{a}^\dagger(0)$$

$$\hat{x}_2 = i(\hat{a}(0) - \hat{a}^\dagger(0))$$

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = 2i [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]$$

Unschärferelation $\Delta \hat{x}_1 \Delta \hat{x}_2 \geq 1$ $\langle n | \hat{x}_1 | n \rangle = 0$

$$\langle n | \hat{x}_2 | n \rangle = 0$$

im Vakuumzust. gilt $\Delta \hat{x}_1 \Delta \hat{x}_2 = 1$ (minimale Unschärfe)

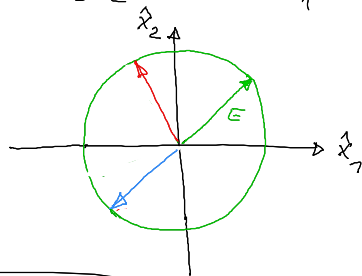
Darstellung der Feldstärke durch \hat{x}_1, \hat{x}_2 :

$$\hat{E} = C (\hat{a}(0) e^{i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{-i\omega t})$$

$$\stackrel{\parallel}{\frac{\hat{x}_2 + i\hat{x}_1}{2i}} \quad \quad \quad \stackrel{\parallel}{\frac{-\hat{x}_2 + i\hat{x}_1}{2i}}$$

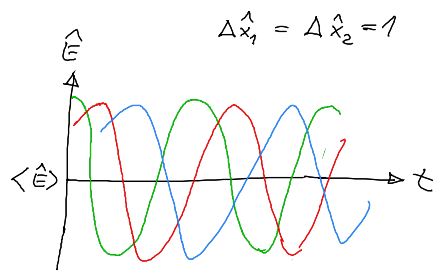
$$= C \left[\hat{x}_2 \left(\frac{e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}}{2i} \right) + i\hat{x}_1 \left(\frac{e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}}{2i} \right) \right]$$

$$= -C [\hat{x}_2 \sin \omega t + \hat{x}_1 \cos \omega t]$$



Koord. system
durch Auf. bed.
definiert

Amplitude des
 \hat{E} -Feldes ist fest,
aber Phase ist
unbestimmt



Resultat: Fock-Zustand ist maximal nichtklassisch