

English Summary:

Moments of a probability distribution $M_\nu \equiv \langle x^\nu \rangle$

Moment generating function $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\nu!} M_\nu$

cumulant generating function $\Gamma(\alpha) = \ln \langle e^{\alpha x} \rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\nu!} C_\nu \equiv \langle x^\nu \rangle_c$

$\langle x \rangle_c = \langle x \rangle$ mean

$\langle x^2 \rangle_c = \langle (\Delta x)^2 \rangle$ variance covariance matrix $(\Delta x_k \Delta x_l)$
(correlation)

$\langle x^3 \rangle_c = \langle (\Delta x)^3 \rangle$ skewness

Stochastic process: random variable $X(t)$ with probability
 $p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots)$

Markov process: $p(x_1, t_1 | x_2, t_2; x_3, t_3; \dots) = p(x_1, t_1 | x_2, t_2)$

Chapman-Kolmogorov eq. $p(1|3) = \int dx_2 p(1|2) p(2|3)$

Ergodizität

Für stationäre Prozesse: Ensemble-Mittel $\stackrel{!}{=} \text{Zeitmittel}$

Zeitmittel $\bar{X}(T) := \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt x(t)$, $T \rightarrow \infty$

$$\bar{X}(T) = \langle x \rangle$$

\Rightarrow Berechnung der Autokorrelationsfkt. durch Zeitmittel:

$$G(\tau) := \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \stackrel{!}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt x(t)x(t+\tau)$$

Zusammenhang mit spektralen Eigenschaften:

Fourier-Transform $\hat{x}(\omega; T) := \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T dt e^{i\omega t} x(t)$

Es gilt $G(\tau) = G(-\tau)$

Spektrale Leistungsdichte (power spectral density)

$$\begin{aligned} S(\omega) &:= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} |\hat{x}(\omega; T)|^2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T dt' e^{i\omega(t-t')} x(t)x(t') \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int d\tau e^{-i\omega\tau} \underbrace{\frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt x(t)x(t+\tau)}_{\tau} \end{aligned}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} G(\tau)$$

Wiener - Khinchin - Theorem

Umkehrung: $G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega\tau} S(\omega)$

homogener stoch. Prozess:

$\lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t | x, 0) = p(x)$ (stationärer Prozess wird von jeder Anfangsbed. erreicht)

1.3 Chapman - Kolmogorov - Gleichung

Aus der Chapman - Kolmogorov - gl. (diskret in t)

$$p(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int dx_2 p(x_1, t_1 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | x_3, t_3)$$

$t_1 \geq t_2 \geq t_3$

lässt sich eine Diff. gl. für $p(x, t | x_0, t_0)$ ableiten:

Annahmen: für $\varepsilon > 0$

(i) $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(x, t + \Delta t | z, t) - p(x, t | z, t)}{\Delta t} = W(x | z, t)$ gleichförmig in x, z, t
für $|x - z| \geq \varepsilon$
(Sprünge)

Übergangswahrscheinl. pro Zeiteinheit $z \rightarrow x$

(ii) $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-z| < \varepsilon} dx (x_i - z_i) p(x, t + \Delta t | z, t) = A_i(z, t) + O(\varepsilon)$ gleichförmig
(kontinuierliche Übergänge)

(iii) $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-z| < \varepsilon} dx (x_i - z_i)(x_j - z_j) p(x, t + \Delta t | z, t) = B_{ij}(z, t) + O(\varepsilon)$ gleichförmig

alle höheren Momente verschwinden $O(\varepsilon)!$

• Betrachte $\frac{\partial}{\partial t} \int dx f(x) p(x, t | y, t')$ für bel. Fkt. $f(x)$

und leite daraus Dgl. für $\frac{\partial}{\partial t} p(x, t | y, t')$ ab:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dx f(x) p(x,t|y,t') = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \int dx f(x) \frac{[p(x,t+\Delta t|y,t') - p(x,t|y,t')]}{\Delta t} \right\}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int dx f(x) \frac{\int dz \underbrace{p(x,t+\Delta t|z,t)}_{\text{Chapman-Kolmogorov}} p(z,t|y,t') - p(x,t|y,t')}{\Delta t}$$

umbenennen $x \rightarrow z$

für $|x-z| < \epsilon$:

Entwicklung $f(x) = f(z) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} (x_i - z_i) + \sum_{ij} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} (x_i - z_i)(x_j - z_j) + \text{Rest} (\rightarrow 0 \text{ für } |x-z| \rightarrow 0)$

Anspaltung in Integrale $\int_{|x-z| < \epsilon}$ und $\int_{|x-z| > \epsilon}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dx f(x) p(x,t|y,t')$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{|x-z| < \epsilon} dx dz \left[\underbrace{f(z)}_{A_i} \frac{\partial f}{\partial z_i} + \sum_{ij} \frac{1}{2} (x_i - z_i)(x_j - z_j) \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \right] p(x,t+\Delta t|z,t) p(z,t|y,t') \right\}$$

(i) (iii) gibt Beitrag für $\epsilon \rightarrow 0$ (1)

+ $\int_{|x-z| < \epsilon} dx dz$ höhere Mon. $\rightarrow 0$

+ $\int_{|x-z| < \epsilon} dx dz f(z) p(x,t+\Delta t|z,t) p(z,t|y,t')$ $\rightarrow 0$

+ $\int_{|x-z| \geq \epsilon} dx dz f(x) p(x,t+\Delta t|z,t) p(z,t|y,t')$ (2) } (i) einsetzen

Umbenennung $x \leftrightarrow z$

- $\int dx dz f(z) p(x,t+\Delta t|z,t) p(z,t|y,t')$ (3) } W

$\int dx p(x,t+\Delta t|z,t) = 1$ eingefügt

(2) $\epsilon \rightarrow 0 \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-z| > \epsilon} dx = \text{Hauptwertintegral (Annahme: existiert)}$

(1) partielle Integration

$$\int dz \left(\frac{\partial}{\partial z_i} f(z) \right) A_i(z) p(z,t|...) = - \int dz f(z) \frac{\partial}{\partial z_i} (A_i(z) p(z,t|...)) + \text{Randterme} (\rightarrow 0)$$

$$\int dz \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} f(z) \right) B_{ij}(z) p(z,t|...) = + \int dz f(z) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} [B_{ij}(z) p(z,t|...)]$$

$\Rightarrow \int dz f(z) [\dots] = 0$ für bel. $f(z)$

$[\dots] = 0$

Eng.:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t | y, t') = - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} [A_i(z, t) p(z, t | y, t')] \quad (1)$$

$$+ \sum_{ij} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} [B_{ij}(z, t) p(z, t | y, t')] + \int dx [W(z|x, t) p(x, t | y, t') - W(x|z, t) p(z, t | y, t')] \quad (2) \quad (3)$$

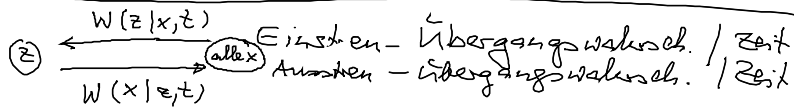
(differenzielle Chapman-Kolmogorov-Gl.)

Anfangsbed. $p(z, t' | y, t') = \delta(y - z)$ $t' = \text{Anfangszeit}$

(a) Sprung-Prozesse (diskontinuierlich)



$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t | \dots) = \int dx [W(z|x, t) p(x, t | \dots) - W(x|z, t) p(z, t | \dots)]$$



Mastergleichung (Bilanz rein - raus)