

English Summary:

1. Stochastic Processes

1.1 Random variables $X: \tilde{M} \rightarrow M$
event realization

(i) $M =$ sample set (complete set of disjoint events $\{A_1, \dots, A_n\}$)
 $\bigcup_{i=1}^n A_i = S$ $A_i \cap A_j = \emptyset$

\subseteq Boolean algebra \mathcal{A} (Boolean lattice): union \cup
 intersection \cap
 inclusion \subseteq

(ii) Probability $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$

Conditional probability $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ← joint probability

A_1, A_2 uncorrelated $\Leftrightarrow P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$

continuous events: probability density fct. (PDF) $g(x)$

$x \in \mathbb{R}^d$: normaliz. $\int d^d x g(x) = 1$, mean value $\langle x \rangle = \int d^d x g(x) x$

x_1, x_2 uncorrelated $\Leftrightarrow g(x_1, x_2) = g_1(x_1) g_2(x_2)$
 $\Rightarrow \langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle$

Momente einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

v -te Moment $M_v := \langle x^v \rangle$

Momentenerzeugende $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\alpha^v}{v!} M_v$
 (charakt. Fkt.)

$$\left. \frac{\partial^v}{\partial \alpha^v} Z(\alpha) \right|_{\alpha=0} = M_v$$

Kenntnis aller Momente ist äquivalent zur Wahrscheinl. verteilung

$\alpha = is$: Fourier-Inverse von $Z(is) = \int dx g(x) e^{isx}$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int ds Z(is) e^{-isx}$$

Verallg. auf d Zufallsvar.:

$$M_{v_1 v_2 \dots v_d} = \langle x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_d^{v_d} \rangle$$

Momente der Ordnung
 $v := v_1 + v_2 + \dots + v_d$

$$\text{Momentenerzeugende } Z(\underline{\alpha}) = \langle e^{\underline{\alpha} \cdot \underline{x}} \rangle = \sum_{v_1 \dots v_d} \frac{\alpha_1^{v_1} \dots \alpha_d^{v_d}}{v_1! \dots v_d!} M_{v_1 \dots v_d}$$

$$\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$$

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$$

Kumulante $C_{\nu_1 \dots \nu_d} = \langle x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_d^{\nu_d} \rangle_c$ ist definiert durch die
Kumulanten erzeugende $\Gamma(\underline{\alpha}) = \ln \langle e^{\underline{\alpha} \cdot \underline{x}} \rangle = \sum_{\nu_1 \dots \nu_d} \frac{\alpha_1^{\nu_1} \dots \alpha_d^{\nu_d}}{\nu_1! \dots \nu_d!} C_{\nu_1 \dots \nu_d}$

Eigenschaft :

Kumulanten sind additiv für unkorrelierte Zufallsvar.

(gilt nicht für Momente !! $\langle (x_1 + x_2)^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle + \langle x_2^2 \rangle + 2\langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle$)

Beweis : Seien x_1, x_2 unkorreliert $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$
 $\underline{x} = (x_1, x_2)$

$$\Rightarrow Z(\underline{\alpha}) = \langle e^{\underline{\alpha} \cdot \underline{x}} \rangle = \int dx_1 dx_2 g(x_1) g(x_2) e^{\alpha_1 x_1} e^{\alpha_2 x_2} \\ = \langle e^{\alpha_1 x_1} \rangle \langle e^{\alpha_2 x_2} \rangle$$

$$\Rightarrow \Gamma(\underline{\alpha}) = \ln Z(\underline{\alpha}) = \ln \langle e^{\alpha_1 x_1} \rangle + \ln \langle e^{\alpha_2 x_2} \rangle \stackrel{!}{=} \Gamma(\alpha_1) + \Gamma(\alpha_2)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha : \Gamma(\alpha, \alpha) = \ln \langle e^{\alpha \underbrace{(x_1 + x_2)}_x} \rangle = \sum_{\nu} \frac{\alpha^{\nu}}{\nu!} \langle (x_1 + x_2)^{\nu} \rangle_c \\ = \sum_{\nu} \frac{\alpha^{\nu}}{\nu!} \langle x_1^{\nu} \rangle_c + \sum_{\nu} \frac{\alpha^{\nu}}{\nu!} \langle x_2^{\nu} \rangle_c$$

$$\Rightarrow \langle (x_1 + x_2)^{\nu} \rangle_c = \langle x_1^{\nu} \rangle_c + \langle x_2^{\nu} \rangle_c$$

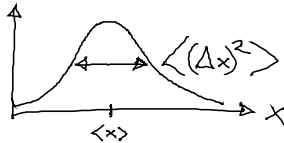
□

Fluktuation $\Delta x := x - \langle x \rangle$

Es gilt $\langle \Delta x \rangle = 0$

$$\text{Varianz} : \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \\ = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Maß für die Breite einer Verteilung f



Korrelationsmatrix (Kovarianzmatrix)

$$\langle \Delta x_k \Delta x_l \rangle = \langle x_k x_l \rangle - \langle x_k \rangle \langle x_l \rangle$$

Nichtdiagonalelemente verschwinden für unkorr. Zufallsvar. !

Zusammenhang zwischen Kumulanten u. Momenten:

$$\langle x \rangle_c = \langle x \rangle \quad \text{mean}$$

$$\langle x^2 \rangle_c = \langle (\Delta x)^2 \rangle \quad \text{Varianz (Breite)}$$

$$\langle x^3 \rangle_c = \langle (\Delta x)^3 \rangle \quad \text{skewness (Schiefe: Maß für Asymmetrie)}$$

$$\langle x^4 \rangle_c = \langle (\Delta x)^4 \rangle - 3 \langle (\Delta x^2) \rangle^2 \quad \text{kurtosis (Wölbung)}$$



Zentraler Grenzwertsatz:

Seien X_1, \dots, X_n unkorrelierte Zufallsvar. mit $\langle X_i \rangle = 0$

$$\langle (\Delta X_i)^2 \rangle = b_i^2$$

(z.B. random walk = Brown'sche Bewegung mit Zeitschritt n)

Dann konvergiert die Verteilung von $x = \sum_i X_i$ für $n \rightarrow \infty$ gegen

Gaußverteilung
$$g(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \sigma^2 = \sum_i b_i^2$$

(Normalverteilung)

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle_c, \quad \langle x^k \rangle_c = 0 \quad \text{für } k > 2$$

1.2 Markov-Prozesse

Stochastischer Prozess:

Zeitentwicklung einer Zufallsvar. $X(t)$

zeitabh. Verbundwahrscheinl. $p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots)$

mit Realisierungen x_1, x_2, x_3, \dots von $X(t)$

bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p(x_1, t_1 | x_2, t_2; x_3, t_3; \dots) = \frac{p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots)}{p(x_2, t_2; x_3, t_3; \dots)}$$

$(t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots)$

Markov-Prozess:

$$p(x_1, t_1 | x_2, t_2; x_3, t_3; \dots) = p(x_1, t_1 | x_2, t_2)$$

nicht die ganze Vergangenheit (t_2, t_3, t_4, \dots) bestimmt die Zukunft (t_1) , sondern nur die Gegenwart (t_2)

→ stochast. Prozess "ohne Gedächtnis"

$$\begin{aligned}
\text{also: } p(x_1, t_1; x_2, t_2, x_3, t_3, \dots) &= p(x_1, t_1 | \underline{x_2, t_2}) p(x_2, t_2; x_3, t_3, \dots) \\
&= p(x_1, t_1 | \underline{x_2, t_2}) p(x_2, t_2 | \underline{x_3, t_3}) p(x_3, t_3, \dots) \\
&= p(x_1, t_1 | \underline{x_2, t_2}) p(x_2, t_2 | \underline{x_3, t_3}) \dots p(x_{n-1}, t_{n-1} | \underline{x_n, t_n}) p(x_n, t_n) \\
&\quad t_1 \leftarrow t_2 \leftarrow t_3 \dots \leftarrow t_{n-1} \leftarrow t_n \\
&\quad (\text{Markov-Kette})
\end{aligned}$$

Für Verbundwahrscheinl. unkorrelierte Ereignisse gilt:

$$\sum_B P(A \cap B \cap C) = \underbrace{P(B)}_1 P(A \cap C) = P(A \cap C)$$

Also gilt immer (auch nicht-Markov):

$$\begin{aligned}
p(x_1, t_1) &= \int dx_2 p(x_1, t_1; x_2, t_2) \\
&\quad (\text{Def. bed. W}) \\
&= \int dx_2 p(x_1, t_1 | x_2, t_2) p(x_2, t_2)
\end{aligned}$$

$$\text{kurz: } p(1) = \int dx_2 p(1|2) p(2) \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
p(1|3) &= \int dx_2 p(1, 2 | 3) \\
&= \int dx_2 \frac{p(1, 2; 3)}{p(3)} = \int dx_2 \frac{p(1, 2; 3)}{p(2, 3)} \frac{p(2, 3)}{p(3)} \\
&= \int dx_2 p(1|2, 3) p(2|3) \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\text{Markov-Annahme: } p(1|2, 3) = p(1|2)$$

$$\Rightarrow p(1|3) = \int dx_2 p(1|2) p(2|3) \quad (3)$$

$$p(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int dx_2 p(x_1, t_1 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | x_3, t_3)$$

Chapman-Kolmogorov-Gleichung

(Funktionalgl. für bedingte Wahrscheinl.)

diskrete Ereignisse:

$$P(n_1, t_1 | n_3, t_3) = \sum_{n_2} P(n_1, t_1 | n_2, t_2) P(n_2, t_2 | n_3, t_3)$$

stationäre stoch. Prozess:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots) = p(x_1, t_1 + \epsilon; x_2, t_2 + \epsilon; x_3, t_3 + \epsilon; \dots)$$

(Zeittranslationsinvarianz)

$$\Rightarrow p(x, t) = p(x) \quad \text{zeitunabh.} \quad (\Rightarrow \langle x \rangle \text{ zeitunabh.})$$

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2) = p(x_1, t_1 - t_2; x_2, 0) \quad (*)$$

$$p(x_1, t_1 | x_2, t_2) = p(x_1, t_1 - t_2 | x_2, 0)$$

(notw. + hinreich. für stationären Markov-Prozess)

$$\Rightarrow \text{Autokorrelationsfkt.} \quad \langle x(t)x(t+\tau) \rangle =: G(\tau) = G(-\tau)$$