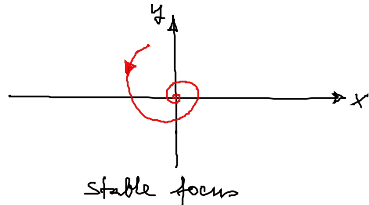


English Summary:
3.2 Noise-induced oscillations

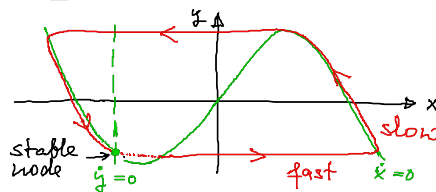
Van der Pol osc. below Hopf bif. ($\epsilon < 0$)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (\epsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + \sqrt{2D} \xi(t) \end{aligned}$$

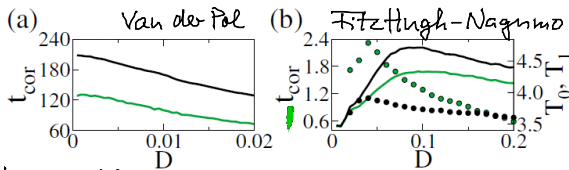
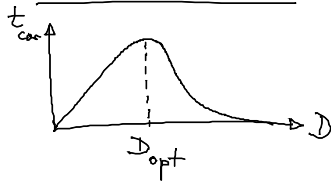


FitzHugh-Nagumo model (exc. type II) ($a > \sqrt{1/3}$)

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} &= x + a + \sqrt{2D} \xi(t) \end{aligned}$$



Kohärenzresonanz

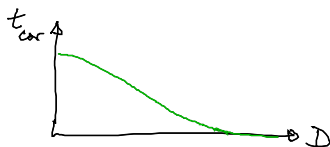


keine Kohärenzresonanz Kohärenzresonanz
FIG. 2 (color online). Correlation time t_{cor} vs noise intensity D for (a) the Van der Pol oscillator and (b) the FitzHugh-Nagumo system. Grey (green online) lines: $K = 0$; black lines: $K = 0.2, \tau = T_0$. (b) Grey (green online) circles: T_0 for $K = 0$; black circles: T_1 for $K = 0.2, \tau = T_0$.

Zusammenspiel zweier Zeitskalen (FHN-Modell):

- Aktivierungszeit (Fixpt. \rightarrow Schwelle): Irregularität nimmt ab mit D
- Spike-Dauer + Erholungszeit (determ.) (recovery time): Irregularität nimmt zu mit D

NS: Van der Pol-Osc. zeigt keine Kohärenzresonanz



t_{cor} monoton abnehmend
(kein Schwellenverhalten, nur lokale Eigenschaft des Fixp.)

3.4 Korrelationszeit und spektrale Leistungsdichte

Analyt. Näherung für $t_{\text{cor}}(D)$ für Van der Pol-Osz.

(selbstkons. mean-field-Näherung, Pomplun, et al., Europhys. Lett. 71, 366 (2005))

Näherung für $D \ll |\varepsilon| \omega_0$: $\langle x^2 \rangle$ klein

$$\varepsilon - x^2 \approx \varepsilon - \langle x^2 \rangle = \tilde{\varepsilon} < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \tilde{\varepsilon} y - \omega_0^2 x + D \xi(t) \end{cases}$$

lin. stoch. Dgl. (multivariater Ornstein-Uhlenbeck-Prozess)
stationär $\langle x_s \rangle = 0$

$$dx_s = -\underline{A} x_s dt + \underline{B} dW(t) \quad x_s = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega_0^2 & -\tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Varianz-Matrix

$$\underline{\Sigma} = \langle x_s(t) \otimes x_s(t) \rangle = \frac{D^2}{-2\tilde{\varepsilon}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_0^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle x^2 \rangle = \frac{D^2}{-2\tilde{\varepsilon}\omega_0^2} = \frac{D^2}{-2(\varepsilon - \langle x^2 \rangle)\omega_0^2}$$

selbstkonsistente Lösung von $\langle x^2 \rangle$ in Abhäng. von D

$$\langle x^2 \rangle^2 - \varepsilon \langle x^2 \rangle - \frac{D^2}{2\omega_0^2} = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\varepsilon}{2} (\pm) \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{1 + \frac{2D^2}{\varepsilon^2 \omega_0^2}} \quad (+) \text{ unphys. Lös., da } \langle x^2 \rangle > 0!$$

$$\Rightarrow \tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \langle x^2 \rangle = \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2D^2}{\varepsilon^2 \omega_0^2}} \right)$$

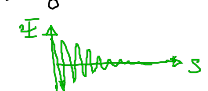
Dämpfung $\tilde{\varepsilon}$ = Abstand zur Hopf-Bif. wächst mit Rauschintensität D !
($\tilde{\varepsilon}=0$)

Autokorrel.fkt. für linearen stoch. Prozess

$$\underline{Z}_{yy}(s) = \langle y(t+s)y(t) \rangle \approx \underline{Z}_{yy}(0) e^{ps} \cos \tilde{\omega}s$$

wobei $\lambda_{1,2} = p \pm i\tilde{\omega} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{4}}$ die Eigenwerte von \underline{A} sind.

$$\Rightarrow t_{cor} = \frac{1}{\mathbb{E}(\psi)} \int_0^{\infty} |\mathbb{E}(\psi^s)| ds \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ps} ds = -\frac{2}{\pi p}$$



$$\Rightarrow t_{cor}(D) \approx \frac{4}{\pi |\tilde{\mathbb{E}}(D)|}$$

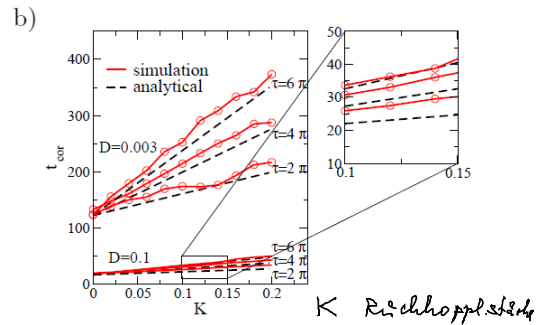
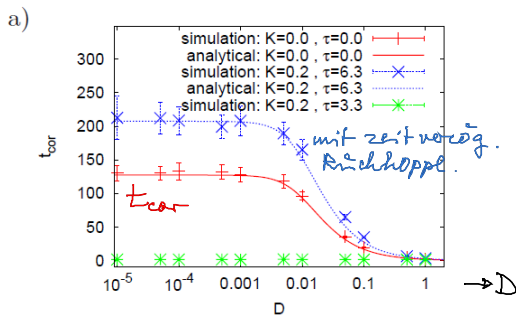


Fig. 2 – Correlation time t_{cor} in the VdP system for $\varepsilon = -0.01$ a) vs. noise intensity D for different values of τ and K (symbols: numerical solution; solid line: analytical mean-field estimate from eq. (12) for $K = 0$, and from eq. (18) for $K = 0.2, \tau = 6.3$); b) vs. feedback strength K for three different values of τ ; analytical: from eq. (18).

Pomplun et al (2005)

Spektrale Leistungsdichte

Fourier-Transformierte der mean-field-gl. : $\dot{x} = y$
 $(x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \hat{x}(\omega))$ $\dot{y} = \tilde{\mathbb{E}}y - \omega_0^2 x + D\xi(t)$

$$-i\omega \hat{x}(\omega) = \hat{y}(\omega)$$

$$-i\omega \hat{y}(\omega) = \tilde{\mathbb{E}}\hat{y}(\omega) - \omega_0^2 \hat{x}(\omega) + D\hat{\xi}(\omega)$$

Elim. von $\hat{x}(\omega) = \frac{i}{\omega} \hat{y}(\omega)$:

$$-i\omega \hat{y} - \tilde{\mathbb{E}}\hat{y} + i\frac{\omega_0^2}{\omega} \hat{y} = D\hat{\xi} \quad | i\omega$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{i\omega D \hat{\xi}(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega \tilde{\mathbb{E}}}$$

$$\langle \hat{y}(\omega) \hat{y}^*(\omega') \rangle = \frac{(i\omega D)(-i\omega' D) \langle \hat{\xi}(\omega) \hat{\xi}^*(\omega') \rangle}{(\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega \tilde{\mathbb{E}})(\omega'^2 - \omega_0^2 + i\omega' \tilde{\mathbb{E}})}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\xi}(\omega) \hat{\xi}^*(\omega') \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-i\omega' t'} \underbrace{\langle \xi(t) \xi(t') \rangle}_{\delta(t-t')} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega-\omega')t} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\delta(\omega-\omega')} \end{aligned}$$

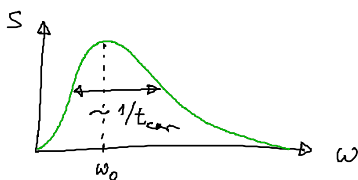
R.S.: $\omega = \omega'$

$$\Rightarrow \langle \hat{y}(\omega) \hat{y}^*(\omega') \rangle = \frac{D^2}{2\pi} \frac{\omega^2 \delta(\omega-\omega')}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \tilde{\epsilon}^2}$$

andere Seite mit Wiener-Khinchin-Theorem:

$$\begin{aligned} \langle \hat{y}(\omega) \hat{y}^*(\omega') \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-i\omega' t'} \langle y(t) y(t') \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega-\omega')t} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i\omega' s} \langle y(t) y(t+s) \rangle}_{\delta(\omega')} \end{aligned}$$

$$S_{yy}(\omega) = \frac{D^2}{2\pi} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \tilde{\epsilon}^2}$$



Lorentzkurve mit Max. bei ω_0
und Halbwertsbreite $\approx \frac{|\tilde{\epsilon}|}{2} = \frac{2}{\pi \tau_{\text{osc}}(D)}$

Analyt. Näherungen für FitzHugh-Nagumo-Modell

Prager, Lerch, Schimansky-Gieser, Schöll, J. Phys. A 40, 11045 (2007)
Kowasik, Schimansky-Gieser, Schöll, Eur. Phys. J - ST 191, 29 (2010)
2-state Master eq.

gekoppelte FitzHugh-Nagumo-Systeme mit Rauschen

Hauschildt, Balazsov, Janson, Schöll, PRE 74, 051906 (2006)

stochast. Synchronisation

$$\text{farbiges Rauschen: } \langle \eta(t) \eta(t') \rangle = \sigma^2 e^{-|t-t'|/\tau_c}$$

Rausch-Korrel.zeit τ_c

\Leftrightarrow generiert durch Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

$$\tau_c \dot{z} = -z + \sqrt{2\sigma^2 \tau_c} \xi(t) \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t-t')$$

Brandstetter, Dahlem, Schöll: Phil. Trans. R. Soc. A 368, 391 (2010)