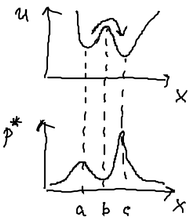
English Summary

Kramers Problem: escape over potential barrier



mean first passage time

$$\boxed{T(a \to x_0 \approx b) \approx 2\pi \alpha \delta \exp\left[\frac{U(b) - U(a)}{D}\right]}$$

bimodal probability distribution

2.3 Langevin equation

$$\boxed{\dot{x} = a(x,t) + b(x,t)\,\xi(t)}$$

Wiener process

$$\boxed{\dot{x} = \sqrt{2D}\,\xi(t)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,t)p(x,t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[b(x,t)^2 p(x,t)\right] \quad \text{Fokker-Planck eq.}$$

Drift coeff. $A = a$ dif. coeff. $D = \frac{B}{2} = \frac{b^2}{2}$

(ii) Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

$$\underbrace{\boxed{\dot{x} = -kx + \sqrt{2D}\,\xi(t)}}_{\text{lin. Drift}} \qquad \underbrace{\boxed{\frac{\partial}{\partial t}p = \frac{\partial}{\partial x}(kxp) + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}p}}_{\text{FP-Gl.}} \qquad p = p(x,t/x_0,t_0)$$

stationäre Lösung auf $[a,b]$ mit reflektierenden Rändern: $(J(x) = 0)$

$$p^*(x) = N\exp\left[\frac{1}{D}\int_0^x dx'(-kx')\right] = \sqrt{\frac{k}{2\pi D}}\exp\left[-\frac{k}{2D}x^2\right]$$

$$\langle x(t)\rangle = 0$$

$$\langle \Delta x^2\rangle = \frac{D}{k}$$

zeitabhän. Lösung: $\langle x(t)\rangle_{x_0 t_0} = x_0\, e^{-k(t-t_0)}$

$$\langle \Delta x^2\rangle_{x_0 t_0} = \frac{D}{k}\left(1 - e^{-2k(t-t_0)}\right)$$

Autokorr. fkt. (stationär; $t_0 \to -\infty$)

$$\langle x(t_1)x(t_2)\rangle_{x_0 t_0} = \iint dx_1\, dx_2\, x_1 x_2\, p(x_1,t_1,x_2,t_2/x_0,t_0) \qquad t_1 \geq t_2 \geq t_0$$

$$= \int dx_2 \Big[\underbrace{\int dx_1\, x_1\, p(x_1,t_1/x_2,t_2)}_{\langle x_1\rangle_{x_2 t_2} = x_2 e^{-k(t_1-t_2)}}\, x_2\, \underbrace{p(x_2,t_2/x_0,t_0)}_{\sqrt{\frac{k}{2\pi D}}\exp\left[-\frac{k}{2D}x_2^2\right],\ t_0 \to -\infty}$$

$$= e^{-k(t_1-t_2)}\underbrace{\int dx_2\, x_2^2\, p^*}_{\langle x^2\rangle_* = \underbrace{\langle \Delta x^2\rangle_*}_{D/k} + \underbrace{\langle x\rangle_*^2}_{0}}$$

$$= \frac{D}{k}\, e^{-k|t_1 - t_2|}$$

exponentielle Korrelation mit Korrelationszeit $\tau_c = \frac{1}{k}$

$$\boxed{G(\tau) \equiv \langle X(t+\tau)\, X(t) \rangle = \frac{\vartheta}{k} e^{-k|\tau|} = \vartheta\, \tau_c\, e^{-|\tau|/\tau_c}}$$

$S(\omega)$ – Spektrale Leistungsdichte $\quad S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-i\omega\tau}\, G(\tau)$

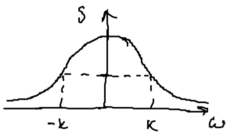
$$S(\omega) = \frac{\vartheta}{2\pi k} \int_0^\infty d\tau\, e^{-k\tau} \left(e^{-i\omega\tau} + e^{i\omega\tau} \right)$$

$$= \frac{\vartheta}{2\pi k} \left[\frac{-1}{k+i\omega} e^{-k\tau - i\omega\tau} \Big|_0^\infty + \frac{-1}{k-i\omega} e^{-k\tau + i\omega\tau} \Big|_0^\infty \right]$$

$$\boxed{S(\omega) = \frac{\vartheta}{2\pi k} \left(\frac{1}{k+i\omega} + \frac{1}{k-i\omega} \right) = \frac{\vartheta}{\pi} \frac{1}{(\omega^2+k^2)}}$$

Lorentzkurve

(Halbwertsbreite $2k$)



Direkte Lösung der Langevin-Gl. $\quad \dot{x} = -kx + \sqrt{2\vartheta}\, \xi(t)$

Subst. $y = x e^{kt}$

$$\dot{y} = (\dot{x} + kx) e^{kt}$$

$$\dot{y} = \left[-kx + \sqrt{2\vartheta}\, \xi(t) \right] e^{kt} + k x e^{kt}$$

$$\dot{y} = \sqrt{2\vartheta}\, e^{kt} \xi(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \sqrt{2\vartheta} \int_0^t e^{kt'} \xi(t')\, dt' + \overbrace{y(0)}^{= x(0) \text{ Anf. bed.}}$$

$$\boxed{x(t) = x(0) e^{-kt} + \sqrt{2\vartheta} \int_0^t e^{-k(t-t')} \underbrace{\xi(t')\, dt'}_{dW'}}$$

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(0) \rangle e^{-kt} + \underbrace{\sqrt{2\vartheta} \int_0^t e^{-k(t-t')} \underbrace{\langle \xi(t') \rangle}_{0} dt'}_{0}$$

zufällige Anf. vert.
(unkorrel. mit $\xi(t)$)

Autokorr. fkt.

$$\langle x(t)\, x(t') \rangle - \langle x(t) \rangle \langle x(t') \rangle$$

$$= \left[\langle x(0)^2 \rangle - \langle x(0) \rangle^2 \right] e^{-k(t+t')} + 2\vartheta \int_0^t dt''\, e^{-k(t-t'')} \int_0^{t'} dt'''\, e^{-k(t'-t''')} \underbrace{\langle \xi(t'')\, \xi(t''') \rangle}_{\delta(t''-t''')}$$

$\int dt''$ fällt weg für $t > t'$
sonst $\int dt'''$ weg

$$= \left[\langle x(0)^2 \rangle - \langle x(0) \rangle^2 \right] e^{-k(t+t')} + 2\vartheta/2k\; e^{-k(t+t')}\, e^{2kt''} \Big|_0^{t'}$$

$$= \left[\langle x(0)^2 \rangle - \langle x(0) \rangle^2 - \frac{\vartheta}{k} \right] e^{-k(t+t')} + \frac{\vartheta}{k} e^{-k|t-t'|}$$

stationär: $t, t' \to \infty$, $t - t'$ endlich

$$= \frac{\vartheta}{k} e^{-k|t-t'|}$$ wie aus FP-Gl.!

Varianz: $t=t'$

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \left[\langle \Delta x(0)^2 \rangle - \frac{\vartheta}{k} \right] e^{-k(t+t')} + \frac{\vartheta}{k} \xrightarrow[\text{stationär}]{t,t' \to \infty} \frac{\vartheta}{k} \quad \text{wie FP-Gl.}$$

3. Rauschinduzierte Oszillationen und Muster

Normalerweise ist Rauschen (noise) unerwünscht, schmiert die determ. Dynamik aus und macht sie irregulär (destruktiv)

Neues Phänomen: konstruktiver Einfluss von Rauschen in nichtlinearen Systemen.

- bestimmte Rauschintensität ist optimal

3.1 Stochastische Resonanz

Verstärkung eines schwachen period. Signals mit Hilfe von Rauschen

Resonanz als Fkt. der Rauschintensität

Lit. Gammaitoni, Hänggi, Jung, Marchesoni, Rev. Mod. Phys. 70, 223 (1998)

Benzi, Sutera, Vulpiani, J. Phys A 14, L 451 (1981)
Nicolis C., Nicolis G., Tellus 33, 225 (1981)
} period. Wiederkehr der Eiszeiten

(kleine period. Schwankungen der Erdachse und der Exzentrizität der Umlaufbahn – reichen allein nicht aus zur Erklärung der Klimaschwankungen,
$\Rightarrow$ stoch. Resonanz)

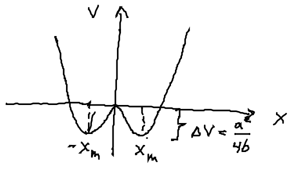
Weitere Beispiele: el. Stromkreis (Schmitt-Trigger)
bistabiler Ringlaser
Neurophysiologie (Spiking; 2-Zustands-System)
z.B. Flusskrebs (crayfish)
- Löffelstöre (paddlefish)
Quanten-Tunneln
raum-zeitl. Systeme (anregbare Medien)

Überdämpftes Brown'sches Teilchen im bist. Potenzial

$$V(x) = -\frac{a}{2} x^2 + \frac{b}{4} x^4$$

mit period. Kraft $A_0 \cos(\Omega t)$

u. weißes Rauschen $\xi(t)$



Langevin-Gl.

$$\boxed{\dot{x} = -V'(x) + A_0 \cos(\Omega t) + \xi(t)} \qquad \langle \xi(t) \rangle = 0$$

$$\langle \xi(t)\, \xi(t') \rangle = 2\vartheta\, \delta(t-t')$$

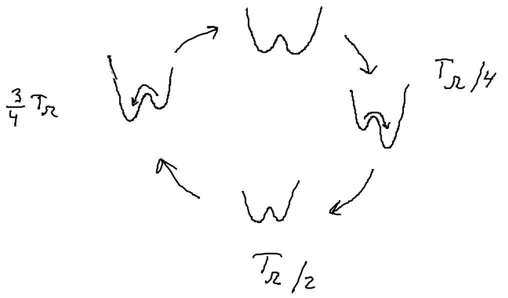
$a=b=1$

$$\dot{x} = x - x^3 + A_0 \cos(\Omega t) + \xi(t)$$

Rauschinduz. Übergangsrate (Kramers-Rate) zwischen $-x_m$ und $+x_m$ (ohne period. Kraft)

$$r_K = \frac{}{T_k(D)} = \frac{}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta V}{D}\right) \qquad (a = b = 1)$$

period. Modulation des Pot. $V(x) \sim A_0 x \cos(\Omega t)$:



$$\boxed{T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega}}$$

$\Rightarrow$ period. Osz. im bistabilen Pot. $\langle x(t) \rangle = \bar{x} \cos(\Omega t - \bar{\varphi}_0)$

Verstärkung der Amplitude $\bar{x}$, wenn $\boxed{T_\Omega \approx 2\, T_k(D)}$

$(\Omega \approx \pi r_k)$

$\Rightarrow$ <u>stochast. Resonanz</u>