English Summary:

3.7 Noise-induced spatio-temporal patterns

excitable media

1. Noise-induced fronts in semiconductor superlattices

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_r\epsilon_0(F_m - F_{m-1}) &= e(n_m - N_D) \\ e\dot{n}_m &= J_{m-1\to m} + D\xi_m(t) - J_{m\to m+1} - D\xi_{m+1}(t) \end{aligned}\right\}$$

$D=0$: SNIPER bifurcation (excitability type I)

$D\neq 0$: coherence resonance

exp.: Y. Huang et al. Europhys. Lett. 105, 47005 (2014)

2. Resonant tunnel diode

$$\left.\begin{aligned} \dot{a} &= f(a,u) + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}a + D_a\xi(x,t) \\ \dot{u} &= \frac{1}{\varepsilon}(U_0 - u - RJ) + D_u\eta(t) \end{aligned}\right\}$$

$D=0$: supercrit. Hopf bifurcation (breathing current filaments)

$D\neq 0$: noise-induced breathing, no coherence resonance (not excitable)

4. Quantenstatistik im Nichtgleichgewicht

4.1 Dichtematrix – statistischer Operator

reiner Zustand: $\boxed{\text{klass. Mechanik}} \xrightarrow[\text{qm. Unschärfe}]{\text{prinzipielle}} \boxed{\text{Quantenmechanik}}$

makr. Beobachtung ↓ (klass. Mechanik → klass. Statistik)

zusätzl. Statistik ↓ unvollständige Info. über Mikrozustand des Systems (Quantenmechanik → Quantenstatistik)

gemisch: $\boxed{\text{klass. Statistik}}$ $\boxed{\text{Quantenstatistik}}$

4.1.1 Erwartungswerte

(i) Reine Zustände

Wahrscheinlichkeit für das Resultat $|\alpha\rangle$ in reinen Zustand $|\psi\rangle$, $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$

$$|\langle\alpha|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|\underbrace{\alpha\rangle\langle\alpha}_{\text{Projektor}}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{P}_\alpha|\psi\rangle = |c_\alpha|^2$$

inhärenter statist. Charakter

Erwartungswert von $\hat{M}$ im Zustand $|\psi\rangle$:

$$\langle\hat{M}\rangle = \langle\psi|\hat{M}|\psi\rangle = \sum_\alpha \langle\psi|\hat{M}|\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle \quad (*)$$

$$= \sum_{\alpha\alpha'} \langle\psi|\alpha'\rangle\langle\alpha|\psi\rangle \underbrace{\langle\alpha'|\hat{M}|\alpha\rangle}_{M_{\alpha\alpha'}}$$

falls $|\alpha\rangle$ Eigenbasis

$$= \sum_\alpha |c_\alpha|^2 M_\alpha$$

M_α: Eigenwert von $\hat{M}$

$$\langle\hat{M}\rangle \overset{(*)}{=} \sum_\alpha \langle\alpha|\underbrace{\psi\rangle\langle\psi}_{\hat{\rho}_\psi}|\hat{M}|\alpha\rangle$$

$$= \mathrm{tr}\,(\hat{\rho}_\psi \hat{M})$$

trace = Spur

(ii) <u>Quantenmech. Gemisch</u>

- unvollständige Info. über Mikrozustand, also Wahrscheinlichkeitsverteilung p_i über die möglichen reinen Zustände $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}^{Fock}$

$$\langle \hat{M} \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{M} | \psi_i \rangle \qquad \text{wobei: } \sum_i p_i = 1$$
$$= \sum_{ij} p_i \langle \psi_i | \hat{M} | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \psi_i \rangle$$
$$= \sum_{ij} \langle \psi_j | \psi_i \rangle p_i \langle \psi_i | \hat{M} | \psi_j \rangle$$
$$= \sum_j \langle \psi_j | \hat{\rho} \hat{M} | \psi_j \rangle \qquad \hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

statistischer Op.
= Dichtematrix

$$\boxed{\langle \hat{M} \rangle = tr(\hat{\rho}\hat{M})}$$

Es gilt: $tr\,\hat{\rho} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho} \\ tr\,\hat{\rho}^2 < 1 \end{array}\right\} \text{ Gleichheit gilt nur für reine Zustände } (\hat{\rho} = \hat{P},\ \hat{P}^2 = \hat{P})$$

$$\hat{\rho}^+ = \hat{\rho} \qquad \text{hermitesch}$$

Mittelwert eines Projektionsop. $|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$:

$$tr(|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\hat{\rho}) = \sum_i p_i |\langle\varphi_n|\psi_i\rangle|^2 = \sum_i p_i |c_n^i|^2$$

$\hat{=}$ Wahrscheinl., den Zustand $|\varphi_n\rangle$ bei Messung zu erhalten

<u>Bem.</u>: reine Zustände $\rightarrow$ kohärente Überlagerung von Wahrscheinl.amplituden

$$\langle \hat{M} \rangle = \sum_{\alpha\alpha'} \underbrace{\langle\psi|\alpha\rangle}_{\text{qm. Phase}} \langle\alpha|\hat{M}|\alpha'\rangle \underbrace{\langle\alpha'|\psi\rangle}_{\text{qm. Phase}}$$

$\Rightarrow$ Interferenzterme, falls $\hat{M}$ nicht diagonal in $|\alpha\rangle$

Gemisch $\rightarrow$ inkohärente Überlagerung von reinen Zuständen

$\Rightarrow$ keine Interferenz!

<u>4.1.2 Liouville-von Neumann-Gleichung</u>

Zeitentwicklung der Dichtematrix im Schrödingerbild (Zust. zeitabh.)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_i\rangle = \hat{H} |\psi_i\rangle$$
$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle\psi_i| = \langle\psi_i| \hat{H}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\hat{\varrho} = \sum_i p_i \left(|\dot{\psi}_i\rangle\langle\psi_i| + |\psi_i\rangle\langle\dot{\psi}_i| \right)$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\sum_i p_i \left(\hat{H}|\psi_i\rangle\langle\psi_i| - |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\hat{H} \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varrho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{\varrho}]}$$

Liouville-von Neumann-Gl.

Vorsicht: nicht verwechseln mit Beweg.gl. für Op. im Heisenbergbild (dort anderes Vorzeichen!)

- Quantenmech. Analogon zur Liouville-Gl. der klass. Mech.

Bem.:
- Für 1 Teilchen im 2-Niveau-System (Basis: 2-Zust.) ist $\hat{\varrho}$ eine 2×2-Matrix, d.h. v. Neumann-Gl. liefert 4 Gln.
- Für Vielteilchensystem (Halbleiter mit 2 Bändern) wird Basis im Fockraum benötigt

4.1.3 Verteilungsfkt. der Elektronen / Löcher im Halbleiter

a_k^+ Erzeugungsop. eines Elektrons im Zustand k

a_k Vernichtungsop. " " " "

Antikommutator $\{a_k^+, a_l^+\} = \{a_k, a_l\} = 0$

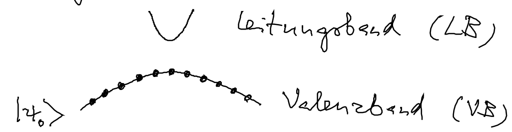
$\{a_k, a_l^+\} = \delta_{kl}$

$\boxed{\text{Antisymm. der Fermionen}}$

Betrachte $\langle a_k^+ a_k\rangle$ Mittelwert des Besetzungszahlop. $a_k^+ a_k$ im gemischten Zustand $\hat{\varrho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

$|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}^{\text{Fock}}$ (Vielteilchenzust.) : mögliche Verteilung der Elektronen auf erlaubte 1-Teilchen-Zustände k (reine Zustände)

Beispiel Halbleiter: Grundzustand bei $T=0$



$$\langle a_k^+ a_k\rangle = \mathrm{tr}\left(\hat{\varrho}\, a_k^+ a_k\right) = \sum_i p_i \underbrace{\langle\psi_i| a_k^+ a_k |\psi_i\rangle}_{n_k^i}$$

n_k^i Besetzung des 1-Teilchen-Zust. k im Vielteilchen-Zust. $|\psi_i\rangle$

$n_k^i = 0, 1$

$$= \sum_i p_i\, n_k^i$$

$= f_e(k)$ Verteilungsfkt.

(Max. von $f_e(k)$: $n_k^i = 1 \; \forall i \Rightarrow f_e(k) = \sum_i p_i = 1$)

$f_e(k)$ ist die Wahrscheinl., ein e^- bei k zu finden

- im reinen Zustand $f_e(k) = 0$ oder $f_e(k) = 1$
- im Gemisch $0 \leq f_e(k) \leq 1$
- im thermodyn. Gleichgewicht ist $f_e(k)$ die Fermi-Verteilung

Analog $\langle d_k^+ d_k \rangle = f_h(k)$ Loch-Verteilungsfkt. (hole)

d_k^+ Erzeugungsop. eines Loches im Zustand k

d_k Vernichtungsop. " "

Bem.: Falls Spin als extra Quantenzahl betrachtet wird:

$$f_e(k) = \frac{1}{2} \sum_s \langle a_{ks}^+ a_{ks} \rangle$$