

## English Summary:


### 4.2 Semiclassical interaction with light


$$\hat{H}_{\text{opt}} = e \underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r}, t)$$

macroscopic polarization  $\underline{P}(\underline{r}, t) = \langle e \hat{\psi}^\dagger(\underline{r}, t) \underline{r} \hat{\psi}(\underline{r}, t) \rangle$  qm. el. dipole density op.

field op.:  $\hat{\psi}^\dagger(\underline{r}, t) = \sum_{\lambda} \hat{\psi}_{\lambda}^*(\underline{r}) a_{\lambda}^+$  creation op.

$\hat{\psi}(\underline{r}, t) = \sum_{\lambda} \hat{\psi}_{\lambda}(\underline{r}) a_{\lambda}$  annihilation op.

microscopic interband polariz.  $p(\underline{k}, t) = \langle d_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \rangle$    $\rightarrow$  em.

$p^*(\underline{k}, t) = \langle a_{\underline{k}}^{\dagger} d_{\underline{k}}^{\dagger} \rangle$    $\rightarrow$  abs.

$$\hat{H}_{\text{opt}} = \sum_{\underline{k}} \underline{p} \cdot \underline{E}(t) (a_{\underline{k}}^{\dagger} d_{\underline{k}}^{\dagger} + d_{\underline{k}} a_{\underline{k}})$$

$$\underline{p}(\underline{k}) = \frac{1}{V} \int d^3r \underline{u}_{c\underline{k}}(\underline{r}) e \underline{r} \cdot \underline{u}_{v\underline{k}}(\underline{r}) \text{ el. dipole matrix element}$$

Semiconductor Bloch eqs:

$$\dot{p}_e(\underline{k}, t) = \frac{1}{i} \Omega_p (p^*(\underline{k}, t) - p(\underline{k}, t))$$

$$\dot{p}(\underline{k}, t) = \frac{1}{i} \omega_p(\underline{k}) p(\underline{k}, t) - \frac{1}{i} \Omega_p (p_e + p_h - 1)$$

$$\dot{p}_h(\underline{k}, t) = \dot{p}_e(\underline{k}, t)$$

$$\Omega_p = \frac{\underline{p} \cdot \underline{E}}{\hbar} \text{ Rabi frequency}$$

$$\omega_p(\underline{k}) = \frac{E_c(\underline{k}) - E_v(\underline{k})}{\hbar} \text{ opt. trans. frequ.}$$

### 4.3 Quantisierung des Strahlungsfeldes

bisher: Materie qm. }  
el. magn. Feld klass. } semiklass. Bloch-Gln

jetzt: voll qm. Beschreibung des Lichtes  $\rightarrow$  E-Feld wird Op.

Wozu? - Beschreibung von Vakuum-Fluktuationen

$\rightarrow$  spontane Emission

- Beschreibung korrelierter Photonen (Verschränkung)

- " nicht-klassischer Photonenstatistik

(anti-bunching bei Einzelphotonenemitter)

- gequetschte Zustände

- Lasing ohne Inversion

Quantisieren: Aufstellen von Vertauschungsrel. von Operatoren im Hilbertraum  
phys. Observable  $\rightarrow$  hermit. Op.

• 1. Quantisierung  $\left( \begin{matrix} x \rightarrow \hat{x} \\ p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla \end{matrix} \right)$  führt auf Schrödingergl.

$$[\hat{p}_i, \hat{x}_k] = \frac{\hbar}{i} \delta_{ik} \mathbb{1}$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_k] = [\hat{x}_i, \hat{x}_k] = 0 \quad i, k = 1, 2, 3 \text{ kart. Koord.}$$

$$\text{Unschärfe } (\Delta \hat{A})^2 = \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle$$

$$\Delta \hat{A} \Delta B \geq \frac{1}{2} | \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle |$$

$$\Delta \hat{x} \Delta \hat{p} \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{qm. Unschärfe}$$

- 2. Quantisierung des Schwinger'schen Wellenfeldes in der Vielteilchentheorie

→ Vereinfachung der (Anti)Symmetrisierung

Erzeugungs- u. Vernichtungs-Op. im Fock-Raum  $\mathcal{H}_F = \sum_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}^N$

+ Quantisierungsvorschrift aus Symmetrie eigenschaften

$$\rightarrow \text{Bosonen} \quad [\hat{a}_k^+, \hat{a}_\ell^+] = [\hat{a}_k, \hat{a}_\ell] = 0$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_\ell^+] = \delta_{k\ell}$$

$$\rightarrow \text{Feldop.} \quad \hat{\psi}^+(\mathbf{x}) := \sum_{\lambda} \hat{a}_{\lambda}^* \hat{a}_{\lambda}^+$$

↑  
Lösung der Schwingeragl. eines Teilchens im Zustand  $\lambda$

NB: Für el. magn. Feld ist Symm. a priori nicht bekannt

→ Quantisierung über Lagrange fkt.

#### 4.3.1 Feldquantisierung über Lagrange-Formalismus

Idee: Analog zur Punktmechanik aus Poisson-Klammer

Vertauschungsrel. folgern

$$L(q_x, \dot{q}_x, t) \rightarrow p_x := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x}$$

Lagrange fkt. für Koord.  $q_x$       kanon. Impulse

$$\{q_x, p_{x'}\} = \delta_{xx'} \xrightarrow{\text{Quantisierung}} [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

- Wirkungsprinzip für Punktmechanik

$$S_S = S \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad \text{mit} \quad 0 = \delta q_x(t_1) = \delta q_x(t_2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x} - \frac{\partial L}{\partial q_x} = 0 \quad (1)$$

- Wirkungsprinzip für Felder  $\psi(\mathbf{x}, t)$  (kontinuierlicher Grenzfall)

$$\text{Teilchen} \quad S_T = S(q_x, \dot{q}_x, t)$$

$$\text{Feld} \quad S_F = S(\psi(\mathbf{x}, t), \partial_t \psi(\mathbf{x}, t), \partial_k \psi(\mathbf{x}, t), t) \quad \partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$= \int dt \int d^3r \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}, \partial_k \psi, t)$$

↑  
Lagrange dichte

$$\text{Lagrange funktional} \quad L := \int d^3r \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}, \partial_k \psi, t)$$

$$= L(\varphi, \dot{\varphi}, t)$$

Hamilton-Prinzip  $\delta S_F = 0$  mit  $\delta\varphi(t_1) = \delta\varphi(t_2) = 0$

$$0 = \delta S_F = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \delta L(\varphi, \dot{\varphi}, \partial_k \varphi)$$

$$= \int d^3r \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial \varphi} \delta\varphi + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \delta\dot{\varphi}}_{\text{part. Int.}} + \underbrace{\sum_k \frac{\partial L}{\partial (\partial_k \varphi)} \delta(\partial_k \varphi)}_{\text{part. Int.}} \right]$$

$$= \int d^3r \left[ \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial (\partial_k \varphi)} \right) \delta\varphi + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \delta\varphi}_{\substack{\delta\dot{\varphi} = 0 \text{ bei} \\ t_1 \text{ und } t_2}} \right]_{t_1}^{t_2} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_k \varphi)} \delta\varphi \right)}_{\substack{\text{Vektordivergenz,} \\ \text{Gauß'scher Satz}}}$$

$\delta\varphi(t)$  unabhängig, frei wählbar

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial (\partial_k \varphi)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right] = 0 \quad (2)$$

Lagrange-gl. für Felder

$$= \frac{\delta L}{\delta \varphi} \triangleq \text{Funktionalableitung von } L$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \{ L(\varphi(x') + \epsilon \delta(x-x'), \dot{\varphi}(x')) - L(\varphi(x'), \dot{\varphi}(x')) \}$$

- verallg. Impuls zu  $\varphi(x)$ :  $\pi(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$
- Hamiltondichte  $\mathcal{H} = \pi(x) \dot{\varphi}(x) - L$
- Hamiltonfunktional  $H = \int d^3r \mathcal{H} = \int d^3r \pi(x) \dot{\varphi}(x) - L$
- Poissonklammer  $\dot{F} = \int d^3r \left( \frac{\delta F}{\delta \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\delta F}{\delta \pi} \dot{\pi} \right) =: \{F, H\}$

$$\text{mit } \frac{\delta H}{\delta \varphi} = -\dot{\pi}$$

$$\frac{\delta H}{\delta \pi} = \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \{ \varphi(x), \pi(x') \} = \delta(x-x')$$

Übergang zur Quantentheorie  $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$   
 $\pi \rightarrow \hat{\pi}$

- Vertauschungsrel. aus Poisson-Klammer  $[\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(x')] = i\hbar \delta(x-x')$
- Zeitentwicklung  $\hat{F} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, \hat{H}]$

### 4.3.2 Lagrangedichte frei freies el.-magn. Feld

Frage:  $\mathcal{L}$ ?

Wähle  $\mathcal{L}$  so, dass Lagrange-Feldgl. die klass. Feldgl. reproduzieren!

Tipp: klass. Feldenergie  $E_{\text{EM}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \underline{E}(\underline{r}, t) \cdot \underline{E}(\underline{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r \underline{B} \cdot \underline{B}$

• klass. Feldgl.: E-Dyn. mit Coulomb-Eichung  $\nabla \cdot \underline{A} = 0$

$$(I) \quad \Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} = 0 \quad \underline{E} = -\dot{\underline{A}} - \nabla \Phi$$

$$(II) \quad \Delta \Phi = 0 \quad \stackrel{\text{BdA}}{\Rightarrow} \Phi = 0 \quad \underline{B} = \nabla \times \underline{A} \stackrel{=0}{=}$$

$\Rightarrow$  Vektorfeld  $\underline{A}$  ist das zu quantisierende Feld  $\psi$

• Ansatz  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \underline{E} \cdot \underline{E} - \frac{1}{\mu_0} \underline{B} \cdot \underline{B})$

Einsetzen in (2) wobei:  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k} = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} = \epsilon_0 \dot{A}_k$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k A_i)} = -\frac{1}{\mu_0} \partial_k A_i$$

$$(\underline{B}^2 = (\nabla \times \underline{A})^2 = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \partial_k A_l \cdot \partial_j A_m)$$

$\Rightarrow$  Lagrange-gl. liefert Wellengl. für  $\underline{A}$ :  $\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} = 0$

kanon. konjug. Feld  $\pi_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} = \epsilon_0 \dot{A}_k = -\epsilon_0 E_k$

Hamiltondichte  $\rightarrow$  Hamiltonfunktional

$$H = \int d^3r \left( \sum_{k=1}^3 \pi_k \dot{A}_k - \frac{\epsilon_0}{2} \dot{\underline{A}}^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \underline{A})^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r \sum_k (\epsilon_0 E_k^2 + \frac{1}{\mu_0} B_k^2) \triangleq \underline{\text{Feldenergie}}$$

• Quantisierung:  $[\hat{A}_k(\underline{r}), \hat{\pi}_{k'}(\underline{r}')] = i\hbar \delta_{kk'} \delta(\underline{r} - \underline{r}')$

$$[\hat{A}_k(\underline{r}), \hat{A}_{k'}(\underline{r}')] = 0$$