Theoretische Physik VI: Vertiefung (Statist. Physik des Nichtgleichgewichts)

Vorlesung Eckehard Schöll WS 2018/19
11 ECTS – Leistungspunkte (4+2 SWS) nach alter StPO
10 ECTS nach neuer StPO

Masterstudiengang Physik
Pflichtmodul Theoret. Physik V/VI
grundlagenorientiert: $\underbrace{\text{TP V (QM II)} + \text{TP VI (Auswahl)}}_{\text{2 Scheine}}$

anwendungsorientiert: $\underbrace{\text{TP V (QM II) oder TP VI}}_{\text{1 Schein}}$

- kann auch als Wahlpflichtfach (8 SWS, 12 ECTS) gewählt werden

VL: Do + Fr 10:15 – 12:00 EW 203
Ü: Mi 16:15 – 18:00 EW 733

Inhalte der VL

1. Stoch. Prozesse
2. Klass. Statistik im Nichtgleichgewicht
3. Rauschinduzierte Oszillationen u. Muster
4. Quantenstatistik im Nichtgleichgewicht
5. Boltzmann-Gleichung

Lit.: s. Webseite

Gardiner, Handbook of stoch. methods
Van Kampen, Stoch. processes in phys. & chem.
Stratonovich
Risken, Fokker-Planck-eq.
Haken, Synergetics

1. Stochastische Prozesse

Grundlagen der Statistik v. Wahrscheinlichkeitstheorie

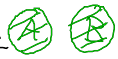
1.1 Zufallsvariablen

Ereignis (event): Messergebnis von Observablen
Mikrozustand

Math. Struktur: Ereignisalgebra $\mathcal{A}$ (Boole'scher Verband)

Menge, $\cup$ (Vereinigung „oder"), $\cap$ (Durchschnitt „und")

<u>Axiome</u>: für $A, B, C \in \mathcal{A}$ gilt

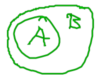
- $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ Kommutativ-gesetz
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ Assoz. gesetz
- $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$ Verschmelzungsgesetz 

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Distrib. gesetz 

$\exists S$ (Einselement: Sicheres Ereignis): $A \cap S = A$

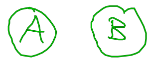
$\exists \emptyset$ (Nullelement: leeres Ereignis): $A \cup \emptyset = A$

$\forall A \in \mathcal{A}$ $\exists B$: $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = S$: Komplement ($B = \bar{A}$, $B = \neg A$)

Induzierte <u>Halbordnung</u>: $A \subseteq B$, falls $A \cap B = A$ 

(A impliziert B)

$A \Rightarrow B$

A und B sind <u>disjunkt</u>, falls $A \cap B = \emptyset$ 

<u>Vollständige disjunkte Ereignismenge</u> (sample set)

$\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ mit $A_i \cap A_j = A_i \delta_{ij}$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$

Beispiel: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ beim Würfel

(NB: diese Menge ist keine Algebra, da $A \cup B \notin M$)
$\bar{A} \notin M$

<u>Wahrscheinlichkeit</u> (Kolmogorov)

Sei $A \in \mathcal{A}$ (Ereignisalgebra), $S \in \mathcal{A}$ sicheres Ereignis

Axiome der Wahrscheinlichkeit $P(A)$, $P: \mathcal{A} \to [0, 1]$

- $P(A) \geq 0$ $\forall A$ 

- $P(S) = 1$
- wenn $A \cap B = \emptyset$ $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 

(disjunkte Ereignisse)

<u>Folgerungen</u>: $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1$

$\Rightarrow P(A) \leq 1$

$P(\emptyset) = 0$, da $\underbrace{P(S)}_{1} = P(\emptyset \cup S) = P(\emptyset) + \underbrace{P(S)}_{1}$

<u>intuitiver Wahrscheinlichkeitsbegriff</u>: relative Häufigkeit $\lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) := \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$ Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist.

$P(A\cap B)$ heißt Verbundwahrscheinl. (joint probability)

A_1, A_2 heißen unkorreliert, falls

$P(A_2|A_1) = P(A_2)$

$\Leftrightarrow \boxed{P(A_1\cap A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2)}$

NB: Somit folgt auch $P(A_1|A_2) = P(A_1)$

Zufallsvar. $X: \underset{\text{Ereignis}}{\tilde{M}} \longrightarrow \underset{\text{Realisierung}}{M}$ ist gegeben durch: (z.B. Identität $\tilde{M} \cong M$)

(i) Menge M von vollständig disjunkten Ereignissen X_i (sample set)

(ii) Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X_i)$ über M

Normierung $\sum_i P(X_i) = 1$ (wegen $\sum_i P(X_i) = P(\bigcup_i X_i) = P(S) = 1$)

Kontinuierliche Ereignismenge $(x\in\mathbb{R})$:

$P(x' \leq x \leq x'+dx') = \rho(x')\,dx'$ definiert

Wahrscheinlichkeitsdichte (Wahrscheinl. verteilung) $\rho(x)$

(Übergang zu diskreten Ereignissen: $\rho(x) = \sum_{i=1}^{n} \delta(x-x^{(i)})\,P_i$)

Normierung $\int_a^b dx\, \rho(x) = 1$

Physikal. Interpretation: Realisierung der Wahrscheinlichk. verteil. durch Ensemble von vielen äquivalenten Systemen, d.h. durch Dichteverteilung $\rho(x)dx$ der Ensemblemitglieder mit Werten $\in [x, x+dx]$.

Verallgemeinerung auf d Zufallsvar.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ $\qquad d^dx = dx_1 dx_2 \dots dx_d$

Normierung $\int d^dx\, \rho(x) = 1$

Mittelwert (Erwartungswert) einer Zufallsvar. x:

$\langle x\rangle := \int d^dx\, \rho(x)\, x$

Für Fkt. $\varphi(x)$:

$\langle \varphi\rangle = \int d^dx\, \rho(x)\,\varphi(x)$

d.h. lineares Funktional $f_\varphi: L \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \langle\varphi\rangle$ $\qquad L$ geeigneter Funktionenraum

Unkorrelierte Zufallsvar.

x_1, x_2 heißen unkorreliert, falls $\boxed{\varrho(x_1, x_2) = \varrho_1(x_1)\, \varrho_2(x_2)}$

Dann gilt $\boxed{\langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle}$

Beweis: $\int dx_1 dx_2\, \varrho(x_1, x_2)\, x_1 x_2 = \underbrace{\int dx_1\, \varrho_1(x_1)\, x_1}_{\langle x_1 \rangle} \underbrace{\int dx_2\, \varrho_2(x_2)\, x_2}_{\langle x_2 \rangle}$ □