

English Summary:
 fields $\hat{A}_k = \sum_{\lambda} \tilde{A}_{k\lambda}(t) (\hat{a}_{\lambda}(0) e^{i\omega_{\lambda}t} + \hat{a}_{\lambda}^{\dagger}(0) e^{-i\omega_{\lambda}t})$ Heisenberg op. $a_{\lambda}(t), a_{\lambda}^{\dagger}(t)$

$$\hat{E}_k = -\frac{1}{\epsilon_0} \hat{\Pi}_k = -\dot{\hat{A}}_k, \quad \hat{B}_k = \epsilon_{kij} \frac{\partial \hat{A}_j}{\partial x_i}$$

free photon Hamiltonian $\hat{H} = \sum_{\lambda} \hbar \omega_{\lambda} (\hat{n}_{\lambda} + \frac{1}{2})$

photon number op. $\hat{n}_{\lambda} = \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\lambda}$

4.4. Quantum states of light

4.4.1 Fock states = photon number states $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^{\dagger})^n |0\rangle$

$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$ phase undetermined, amplitude (energy) sharp
 (maximally nonclassical)

$$\langle \hat{n} \rangle = n \quad \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = 0$$

$$\langle \hat{E} \rangle = 0 \quad \langle (\Delta \hat{E})^2 \rangle = |c|^2 (2\langle \hat{n} \rangle + 1), \quad \hat{E} = C \hat{a} + C^* \hat{a}^{\dagger}$$

4.4.2 Glauber-Zustände - kohärente Zustände

Roy Glauber, Phys. Rev. 130, 2529 (1963)

Nobelpreis 2005

Idee: minimale Unschärfe \rightarrow verschobener Vakuumzustand

Ansatz: suche Eigenzustände zu \hat{a} (Glauber-Zustände)

Eigenwertgl. $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

Entwicklung nach Fock-Zuständen $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} c_n |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-1} |n-1\rangle$$

$$\Rightarrow c_n \sqrt{n} = \alpha c_{n-1}$$

$$\text{rekursiv: } c_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} c_{n-1} = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$$

$$\quad \quad \quad = \frac{\alpha}{\sqrt{n-1}} c_{n-2}$$

$$\quad \quad \quad = \frac{\alpha}{\sqrt{n-2}} c_{n-3}$$

$$\Rightarrow |\alpha\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$\text{aus Normierung } \langle \alpha | \alpha \rangle \stackrel{!}{=} 1 = |c_0|^2 \sum_{n,n'} \frac{\alpha^{*n} \alpha^{n'}}{\sqrt{n! n'!}} \underbrace{\langle n | n' \rangle}_{\delta_{nn'}}$$

$$= |c_0|^2 e^{|\alpha|^2}$$

$$c_0 = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$$

Poisson-Verteilung der Photonen auf Fock-Zustände

$$p(n) = \langle n | \alpha \rangle \langle \alpha | n \rangle = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!} = \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!}$$

Bem.: Zustände sind nicht orthogonal (nur näherungsweise):

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2}$$

Statistische Eigenschaften im Zustand $|\alpha\rangle$

• Feldstärkestatistik

$$\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$$

$$\text{Mittelwert } \langle \alpha | \hat{E} | \alpha \rangle = C \alpha + C \alpha^* = 2C |\alpha| \cos \theta$$

$$\text{Varianz } \langle (\Delta \hat{E})^2 \rangle = \langle \alpha | \hat{E}^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{E} | \alpha \rangle^2$$

$$= \langle \alpha | C^2 (\hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger + \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}) | \alpha \rangle - 4C^2 |\alpha|^2 \cos^2 \theta$$

$$= C^2 (|\alpha|^2 e^{2i\theta} + |\alpha|^2 e^{-2i\theta} + \underbrace{1 + \hat{a} \hat{a}}_{1 + \hat{a} \hat{a}} + 2|\alpha|^2) - 4C^2 |\alpha|^2 \cos^2 \theta$$

$$= C^2 |\alpha|^2 (2 \cos(2\theta) + 2 - 4 \cos^2 \theta) + \underbrace{C^2}_{0}$$

$$= C^2$$

Varianz der Feldstärke im Glauber-Zustand $|\alpha\rangle$ entspricht der Varianz im Vakuum (Fock-Zustand $|0\rangle$),

Unschärfe unabhängig von α

• Photonenstatistik

$$\langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 = \bar{n} \quad \text{mittlere Photonenzahl}$$

$$\langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle$$

$$\quad \quad \quad \underbrace{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1}$$

$$= \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle$$

$$= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 = \bar{n}^2 + \bar{n}$$

Varianz $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \bar{n}^2 + \bar{n} - \bar{n}^2 = \bar{n}$

- Photonenzahl fluktuiert um \bar{n} mit $\sqrt{\bar{n}}$
- $\neq 0$ ($= 0$ im Fock-Zustand)

- Quadraturkomponenten \hat{x}_1, \hat{x}_2

$$\hat{x}_1 = \hat{a}(0) + \hat{a}^\dagger(0)$$

$$\hat{x}_2 = i(\hat{a}(0) - \hat{a}^\dagger(0))$$

$$\langle \alpha | \hat{x}_1 | \alpha \rangle = 2 \operatorname{Re} \alpha$$

$$\langle \alpha | \hat{x}_2 | \alpha \rangle = 2 \operatorname{Im} \alpha$$

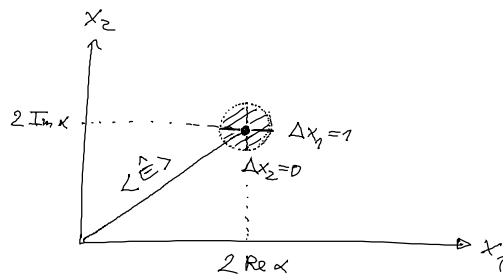
einmodiges E-Feld: $\hat{E} = -C(\hat{x}_2 \sin \omega t + \hat{x}_1 \cos \omega t)$

Schwankung

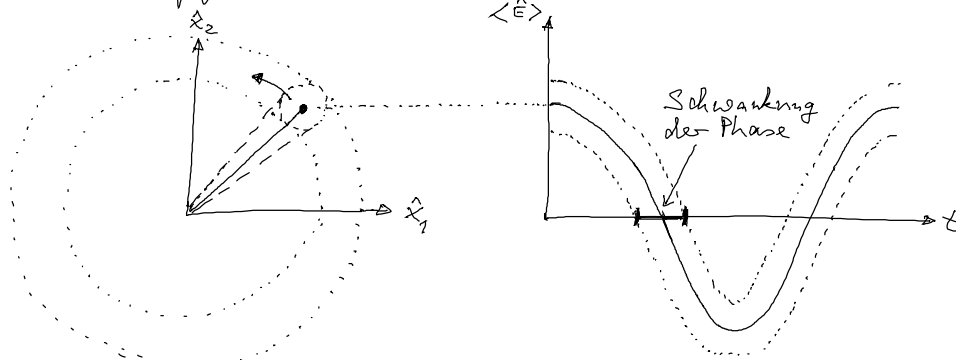
$$\langle \alpha | (\Delta \hat{x}_1)^2 | \alpha \rangle = \langle \alpha | (\Delta \hat{x}_2)^2 | \alpha \rangle$$

$$= \langle \alpha | \underbrace{\hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}}_{1 + \hat{a}^\dagger \hat{a}} + \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger | \alpha \rangle - (2 \operatorname{Re} \alpha)^2$$

$$= 1$$



- Zeitabhängigkeit $\alpha = \alpha_0 e^{-i\omega t}$



Bem.: $\frac{\sqrt{(\Delta \hat{n})^2}}{\langle \hat{n} \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \rightarrow 0$

relative Schwankung verschwindet für große Photonenzahl (also große $|\alpha|$)

- im Glauber-Zustand hat \bar{E} relativ bestimmte Phase + Amplitude

$$\boxed{\text{kohärenter Zustand} = \text{klass. Zustand}}$$

- Glauber-Zustände können durch q_m Verschiebungsop. aus dem Vakuum-Zustand erzeugt werden

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha^n (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$$

$$\hat{D}(\alpha) \quad \text{Verschiebungsop.} \\ = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle$$

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ändert } |0\rangle \text{ nicht}}$$

$$\text{es gilt } e^{A+B} = e^{-\frac{[A,B]}{2}} e^A e^B$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}}$$

- Warum Verschieb. op. $\hat{D}^{-1}(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha$

$$\hat{D}^{-1}(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*$$

Unitäre Transform. mit \hat{D}
verschiebt \hat{a} um α

\Rightarrow verschiebt die Null-Lage des Osz.

- Warum wird $|\alpha\rangle$ kohärenter Zustand genannt?

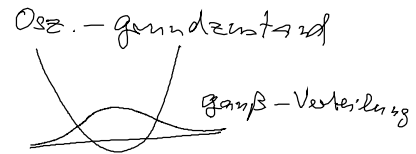
$$\hat{a} \text{ in Orts}(q)\text{-Darstellung} \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} \left(m \omega q + \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial q} \right) \quad p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\hat{a} |0\rangle = 0$$

Bsp. für Vakuumzustand $\phi_0(q)$ in q -Darstellung:

$$\left(\omega q + \hbar \frac{\partial}{\partial q}\right) \phi_0(q) = 0$$

Lösung: $\phi_0(q) = \left(\frac{\omega}{\pi \hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{\omega q^2}{2\hbar}}$



Wähle als Anfangsbed. ein verschobenes Vakuum:

$$t=0: \psi_{\alpha_0}(q) = \langle q | \alpha_0 \rangle = \langle q | \hat{D}(\alpha_0) | 0 \rangle = e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha_0^* q - \alpha_0^2 \frac{\hbar}{2m\omega})} \phi_0(q - q_{\alpha_0})$$

$$q_{\alpha} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \operatorname{Re} \alpha$$

$$p_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \operatorname{Im} \alpha$$

Zeitentwicklung:

$$\psi_{\alpha}(q, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \psi_{\alpha_0}(q) \quad H |n\rangle = E_n |n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle$$

$$= e^{-\frac{|k_0|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_0)^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{i}{\hbar} \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) t} \phi_n(q)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}\omega t} e^{-\frac{|k_0|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_0 e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} \phi_n(q)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}\omega t} \psi_{\alpha(t)}(q) \quad \alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}$$

$$|\psi_{\alpha}(q, t)|^2 = \left| e^{\frac{i}{\hbar} p_{\alpha}(t) q} \phi(q - q_{\alpha(t)}) \right|^2$$

$$= |\phi(q - q_{\alpha(t)})|^2$$

$$= \left(\frac{\omega}{\pi \hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{\omega}{\hbar} (q - q_{\alpha_0} \cos \omega t)^2}$$

Wellenpaket, das hin und her oszilliert, ohne seine Form zu ändern oder zu zerfließen

⇒ kohärenter Zustand

