

Eigenschaften von Tensoren

Diagrammatische Darstellung

Ein Tensor

$$T_{n_1 \dots n_k}$$



wird als Rechteck dargestellt (mandelbrot Form), jeder Index wird als Linie dargestellt.

Werden zwei Indices kontrahiert, so werden die verbunden

Bsp: Matrix-Vektor Produkt

$$\underline{V} = \underline{M} \cdot \underline{a} \Leftrightarrow V_h = \sum_m M_{hm} a_m \Leftrightarrow$$

$$\boxed{V}_h = \boxed{M}_h^m \boxed{a}_m$$

Die Indexbezeichnung wird oft weggelassen.

Die Indices werden oft auch gestrichelt „geprimt“.

Oft gilt Einstein Summenkonvention: gleichnamige Indices mit gleich primierten Indices werden summiert.

Typische Rechenregeln für Tensoren

Falls der Rang der Tensoren und die Dimension der einzelnen Indices

Addition

$$A_{n_1 \dots n_k} + B_{n_1 \dots n_k} = C_{n_1 \dots n_k} \Leftrightarrow \boxed{A} + \boxed{B} = \boxed{C}$$

Multiplikation

$$A_{n_1 \dots n_k} = C_{n_1 \dots n_k} \Leftrightarrow A \boxed{A} = \boxed{C}$$

An den Dimensionen des Tensors machen kann.
komplex konjugiert

$$\overline{\boxed{T}} = \boxed{T}^* \quad T_{n_1 \dots n_k}^* = N_{n_1 \dots n_k}$$

eine Funktion die Elementweise angewandt wird

$$\boxed{f(T)} = \boxed{W} \quad f(T_{n_1 \dots n_k}) = W_{n_1 \dots n_k}$$

Normen

∞ Norm: $\|T\|_\infty = \max_{n_1 \dots n_k} |T_{n_1 \dots n_k}|$

p Norm: $\|T\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n_1 \dots n_k} |T_{n_1 \dots n_k}|^p}$

Spezialfall Frobenius Norm

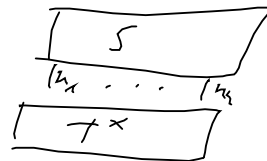
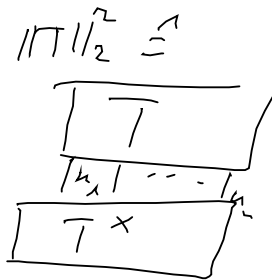
$$\|T\|_2 = \sqrt{\sum_{n_1 \dots n_k} (T_{n_1 \dots n_k})^2}$$

Wichtig für viele Algorithmen.

Zu dieser Norm existiert es ein Skalarprodukt

(Norm induziert ein Skalarprodukt)!

$$(T, S) = \sum_{n_1 \dots n_k} T_{n_1 \dots n_k}^x S_{n_1 \dots n_k}$$



VIII-20 Singulardwertzerlegung, Schmidtzzerlegung, H-Tucker, MPS

Berechne wir die hochrangigen Terme anschauen starten wir mit Matrix zur Lösung dieses Problem. (Dabei verbleibt die Quasimatrix)

Bipartites Quasissystem



Sind $(n)T_1$ OMB in T_1
und $(m)T_2$ OMB in T_2

Dann kann jeder Zustand im Tensorprodukt geschrieben werden als

$$|\psi\rangle = \sum_{nm} a_{nm} |n\rangle_{T_1} |m\rangle_{T_2}$$

Jetzt wir die Schmidtzerlegung,

für jeden $|\psi\rangle$ kann man zeigen, dass es ONB $|Y_n\rangle$ in T_1
 und eine ONB $|Z_n\rangle$ in T_2 existiert mit $\lambda_n > 0$, so dass

$$|\psi\rangle = \sum_n \lambda_n |Y_n\rangle_{T_1} |Z_n\rangle_{T_2}, \text{ wobei die Anzahl } \lambda_n$$

↑
 kleiner als die Dimension der beiden Räume T_1 und T_2
 Einsame im allgemeinen ist!

$$\text{mit } \sum_n \lambda_n^2 = 1$$

Die Anzahl der λ_n mit $\lambda_n > 0$ (insbesondere $\lambda_n \neq 0$)
 nennt man Schmidtzahl.

Sie ist ein Maß für die Verschränkung:

Ein unverschränkter Zustand (separabel) hat die Form
 $|\psi_{uv}\rangle = |u\rangle |v\rangle$ aber Schmidtzahl 1.

Ist T_1 und T_2 zwei Dimensionen, ist ein Bell Zustand ein
 Beispiel für verschränkte Zustände

$$|\psi_{\text{Bell}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_{T_1} |0\rangle_{T_2} + |1\rangle_{T_1} |1\rangle_{T_2})$$

aber Schmidtzahl 2.

Doch wie erhalten wir es aus a_{nm} und $|n\rangle_{T_1}$ und $|m\rangle_{T_2}$

(i) Variante über die reduzierte Dichtematrix

Die Dichtematrix zu $|\psi\rangle$ ist $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

Bestimme die reduzierte Dichtematrix: ρ_A oder ρ_B

$$\rho_{T_2} = \text{tr}_{T_1}(\rho) = \sum_n \langle Y_n |_{T_1} \rho | Y_n \rangle_{T_1} = \sum_n \sum_{n''} \lambda_n \lambda_{n''} \langle Y_n |_{T_1} | Y_{n''} \rangle_{T_1} | Z_n \rangle_{T_2} \langle Z_{n''} |_{T_2} \langle Y_{n''} |_{T_1} | Y_n \rangle_{T_1}$$

$$= \sum_n \lambda_n^2 | Z_n \rangle_{T_2} \langle Z_n |_{T_2}$$

analog

$$S_{T_1} = \langle \psi | \rho \rangle = \sum_n \lambda_n |\psi_n\rangle_{T_1} \langle \psi_n|_{T_1}$$

=> Die Eigenwerte der reduzierten Dichtematrix sind die Quadrate der Schmidt-Koeffizienten und die zugehörigen Eigenvektoren die Basisvektoren der Schmidt-Zerlegung.

Bemerkung Man bestimme in der Regel die reduzierte Dichtematrix des kleineren Systems und bestimme die Schmidt-Basis des anderen Systems über:

$$\langle \psi | \psi_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_n a_{nm} \langle m | \psi_i \rangle \quad \text{z.B.}$$

(ii) Wir führen eine Singularwertzerlegung der Matrix $\underline{A} = (a_{nm})$ durch (kurze SVD)

Dem es ex. Matrix $\underline{S}, \underline{V}, \underline{U}$ für jede Matrix (mit best. L. Eigenw.) so dass

$$\underline{A} = \underline{U} \cdot \underline{S} \cdot \underline{V}^T, \quad \text{wobei } \underline{U}^T \cdot \underline{U} = \text{Id} \quad \text{und} \quad \underline{V}^T \cdot \underline{V} = \text{Id}$$

und \underline{S} ist eine diagonale Matrix mit positiven Eigenwerten

Setzen wir es ein

$$|\psi\rangle = \sum_{nm} a_{nm} |\psi_n\rangle_{T_1} |\psi_m\rangle_{T_2} = \sum_{kn} U_{nk} \frac{S_{kn}}{\sqrt{n}} V_{km} |\psi_n\rangle_{T_1} |\psi_m\rangle_{T_2}$$

$$\text{Definiere } |\psi_k\rangle_{T_1} = \sum_n U_{nk} |\psi_n\rangle_{T_1} \quad \text{und} \quad |\chi_k\rangle_{T_2} = \sum_m V_{km} |\psi_m\rangle_{T_2}$$

Bemerkung: Man kann (i) auf benutzen um die SVD zu berechnen.

Zurück zum Problem

Wie hilft uns das aus?

$$\begin{array}{c} \underline{M} \\ \hline \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \underline{U} \\ \hline \hline \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} \underline{V} \\ \hline \hline \end{array}$$

Unsere Matrix ist $N \times N$ Elemente groß. Nun sind die Singulärwerte positiv, wir sortieren das absteigend vom größten Wert zum kleinsten!

In gewisser Weise sagt die Höhe des Singulärwerts, wie stark der Beitrag der Basisvektoren ist.

=> Idee: nehmen nur die dominantesten Eigenwerte mit, Restliche in Dimension 0.

Vorgehen: • Maximale Anzahl von Linkdimension (Dimension in Matrix S, U, V vorgeben) und entsprechend transkribieren.

• Selektor, ermitteln der kleinsten Singularwerte $i < k$
 So dass z.B. $\sum_{i=0}^k \lambda_i \leq \epsilon$ ist

• Schauen die Änderung in λ_k an, und sprechen ab, ϵ ist ein Punkt wo die Singularwerte abrupt sehr viel kleiner wird.

\Rightarrow d. Anzahl der mitgegebenen Dimensionen, so müssen wir in Z.-d.-N. Werte spenden im Gegensatz zu N.-N.

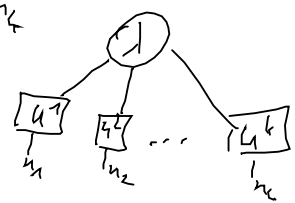
\Rightarrow Nutzt das was für die hochdimensional Tensoren und der Flucht Dimensionalität.

Gibt es Schmidt Zerlegung für höhere Ränge?

Toll wäre es, wenn wir jede Tensor T wie folgt zerlegen könnten (ermittelte Schmidtzerlegung)

$$T_{n_1 n_2 \dots n_k} = \sum_m \lambda_m^{(k)} U_{n_1}^{(1m)} U_{n_2}^{(2m)} U_{n_3}^{(3m)} \dots U_{n_k}^{(km)}$$

Gibt es die Möglichkeit jede Tensoren so darzustellen?



Leider nein! Man kann kein Gegenbeispiel finden

Allerdings wird diskutiert (SIAM Review 51(3) 455-500 Kolda Bader) als canonical decomposition

(CANDECOMP oder CP, PARAFAC)

z.B. für psychometric research, Sprachmass

\Rightarrow Vorgehen in die Verteilung im Erklärer, Fitter z.B. Optimierungsalgorithmen z.B. alternates Least Square

\Rightarrow Konvergenz nicht garantiert (muss ja nicht existieren)

AdA kein Manipuliert an Naturwerk möglich.