

Eigenschaften von Tensoren

Diagrammatische Darstellung

Ein Tensor

$$T_{n_1 \dots n_k} \quad \begin{array}{|c|} \hline T \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} | \\ \hline n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_k \\ \hline \end{array}$$

wird als Rechteck dargestellt (mandalaform Form), jeder Index wird als Linie dargestellt.

Werden zwei Indices kontrahiert, so werden die verbunden

Bsp: Matrix-Vektor Produkt

$$\underline{V} = \underline{M} \cdot \underline{a} \Leftrightarrow V_h = \sum_m M_{hm} a_m \Leftrightarrow$$

$$\boxed{V}_h = \boxed{M}_h^m \boxed{a}_m$$

Die Indexbezeichnung wird oft weggelassen.

Die Indices werden oft auch gestrichelt „geprimt“.

Oft gilt Einstein Summenkonvention: gleichnamige Indices mit gleich primierten Indices werden summiert.

Typische Rechenregeln für Tensoren

Falls der Rang der Tensoren und die Dimension der einzelnen Indices

Addition

$$A_{n_1 \dots n_k} + B_{n_1 \dots n_k} = C_{n_1 \dots n_k} \Leftrightarrow \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} | \\ \hline n_1 \quad \dots \quad n_k \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ \hline n_1 \quad \dots \quad n_k \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ \hline n_1 \quad \dots \quad n_k \\ \hline \end{array}$$

Multiplikation

$$\lambda A_{n_1 \dots n_k} = C_{n_1 \dots n_k} \Leftrightarrow \lambda \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} | \\ \hline n_1 \quad \dots \quad n_k \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ \hline n_1 \quad \dots \quad n_k \\ \hline \end{array}$$

An den Dimensionen des Tensors machen kann.
komplex konjugiert

$$\overline{\overline{A}} = A \quad T_{n_1 \dots n_k}^* = N_{n_1 \dots n_k}$$

eine Funktion die Elementwise angewendet wird

$$\boxed{f(T)} = \boxed{W} \quad f(T_{n_1 \dots n_k}) = W_{n_1 \dots n_k}$$

Normen

∞ Norm: $\|T\|_\infty = \max_{n_1 \dots n_k} |T_{n_1 \dots n_k}|$

p Norm: $\|T\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n_1 \dots n_k} |T_{n_1 \dots n_k}|^p}$

Spezialfall Frobenius Norm

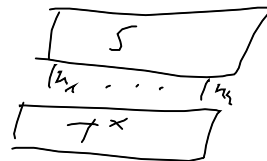
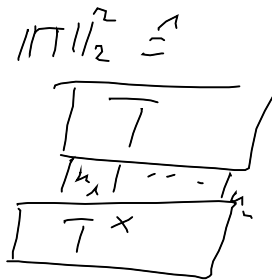
$$\|T\|_2 = \sqrt{\sum_{n_1 \dots n_k} (T_{n_1 \dots n_k})^2}$$

Wichtig für viele Algorithmen.

Zu dieser Norm existiert es in Skalarprodukt

(Norm induziert ein Skalarprodukt)!

$$(T, S) = \sum_{n_1 \dots n_k} T_{n_1 \dots n_k}^x S_{n_1 \dots n_k}$$



VIII-20 Singulärwertzerlegung, Schmidtzerlegung, H-Tucker, MPS

Berechne wir die hochrangigen Terme anschauen starten wir mit Matrix zur Lösung dieses Problem. (Dabei verbleibt die Quaternität)

Bipartites Quatessystem



Sind $\{m\}T_1$ OMB in T_1
und $\{m\}T_2$ OMB in T_2

Dann kann jeder Zustand im Gesamtsystem geschrieben werden als

$$|\psi\rangle = \sum_{nm} a_{nm} |n\rangle_{T_1} |m\rangle_{T_2}$$

Detta wir die Schmidtzerlegung,

für jeden $|\psi\rangle$ kann man zeigen, dass ein ONB $|Y_n\rangle$ in T_1 und ein ONB $|Z_n\rangle$ in T_2 existiert mit $\lambda_n > 0$, so dass

$$|\psi\rangle = \sum_n \lambda_n |Y_n\rangle_{T_1} |Z_n\rangle_{T_2}, \text{ wobei die Anzahl } \lambda_n \text{ kleiner als die Dimension der beiden Räume } T_1 \text{ und } T_2 \text{ ist!}$$

↑
Einsame im allgemeinen ist!

$$\text{mit } \sum_n \lambda_n^2 = 1$$

Die Anzahl der λ_n mit $\lambda_n > 0$ (insbesondere $\lambda_n \neq 0$) nennt man Schmidtzahl.

Sie ist ein Maß für die Verschränkung:

Ein unverschränkter Zustand (separabel) hat die Form $|\psi_{uv}\rangle = |u\rangle |v\rangle$ aber Schmidtzahl 1.

Ist T_1 und T_2 zwei Dimensionen, ist ein Bell Zustand ein Beispiel für verschränkte Zustände

$$|\psi_{\text{Bell}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_{T_1} |0\rangle_{T_2} + |1\rangle_{T_1} |1\rangle_{T_2})$$

aber Schmidtzahl 2.

Doch wie erhalten wir es aus a_{nm} und $|n\rangle_{T_1}$ und $|m\rangle_{T_2}$

(i) Variante über die reduzierte Dichtematrix

Die Dichtematrix zu $|\psi\rangle$ ist $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

Bestimme die reduzierte Dichtematrix: ρ_A oder ρ_B

$$\rho_{T_2} = \text{tr}_{T_1}(\rho) = \sum_n \langle Y_n |_{T_1} \rho | Y_n \rangle_{T_1} = \sum_n \sum_{n''} \lambda_n \lambda_{n''} \langle Y_n |_{T_1} | Y_{n''} \rangle_{T_1} | Z_n \rangle_{T_2} \langle Z_{n''} |_{T_2} \langle Y_n |_{T_1} | Y_{n''} \rangle_{T_1}$$

$$= \sum_n \lambda_n^2 | Z_n \rangle_{T_2} \langle Z_n |_{T_2}$$

analog

$$S_{T_1} = \langle \psi | \rho \rangle = \sum_n \lambda_n |\psi_n\rangle_{T_1} \langle \psi_n|_{T_1}$$

=> Die Eigenwerte der reduzierten Dichtematrix sind die Quadrate der Schmidt-Koeffizienten und die zugehörigen Eigenvektoren die Basisvektoren der Schmidt-Zerlegung.

Bemerkung Man bestimme in der Regel die reduzierte Dichtematrix des kleineren Systems und bestimme die Schmidt-Basis des anderen Systems über:

$$\langle \psi | \psi_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_n a_{nm} \langle m | \psi_i \rangle \quad \text{z.B.}$$

(ii) Wir führen eine Singulärwertzerlegung der Matrix $\underline{A} = (a_{nm})$ durch (kurze SVD)

Dem es ex. Matrix $\underline{S}, \underline{V}, \underline{U}$ für jede Matrix (mit best. L. Eigenw.) so dass

$$\underline{A} = \underline{U} \cdot \underline{S} \cdot \underline{V}^T, \quad \text{wobei } \underline{U}^T \cdot \underline{U} = \text{Id} \quad \text{und} \quad \underline{V}^T \cdot \underline{V} = \text{Id}$$

und \underline{S} ist eine diagonale Matrix mit positiven Eigenw.

Setzen wir es ein

$$|\psi\rangle = \sum_{nm} a_{nm} |\psi_n\rangle_{T_1} |\psi_m\rangle_{T_2} = \sum_{nk} U_{nk} \sum_m \frac{S_{km}}{\sqrt{m}} V_{km} |\psi_n\rangle_{T_1} |\psi_m\rangle_{T_2}$$

$$\text{Definiere } |\psi_k\rangle_{T_1} = \sum_n U_{nk} |\psi_n\rangle_{T_1} \quad \text{und} \quad |\chi_k\rangle_{T_2} = \sum_m V_{km} |\psi_m\rangle_{T_2}$$

Bemerkung: Man kann (i) auf benutzen um die SVD zu berechnen.

Zurück zum Problem

Wie hilft uns das aus?

$$\begin{array}{c} \underline{M} \\ \hline \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \underline{U} \\ \hline \hline \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} \underline{V} \\ \hline \hline \end{array}$$

Unsere Matrix ist $N \times N$ Elemente groß. Nun sind die Singulärwerte positiv, wir sortieren das absteigend vom größten Wert zum kleinsten!

In gewisser Weise sagt die Höhe des Singulärwerts, wie stark der Beitrag der Basisvektoren ist.

=> Idee: nehmen nur die dominantesten Eigenwerte mit, Restliche in Dimension 0.

Vorgehen: • Maximale Anzahl von Linkdimen (Dimen in Matrix
und entsprechend Transkin. S, U, V vorgeben)

• Selektor, erhalte die kleinste Singularwerte $i < k$
So dass z.B. $\sum_{i=0}^k \lambda_i \leq \epsilon$ ist

• Schau die Änderung in λ_k an, und sprech es,
es sei Punkt wo die Singularwerte abrupt sehr viel kleiner
wird.

\Rightarrow d Anzahl der mitgegeben Dimen, so müssen
wir in 2. d. n Werte spend im Gegensatz zu
N. N.

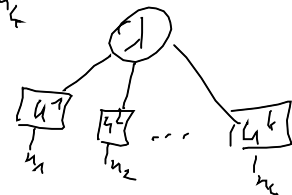
\Rightarrow Nutzt das was für die hochdimensional Tensoren
und der Fluch Dimensionalität.

Gibt es Schmidt Zerlegung für höhere Ränge?

Toll wäre es, wenn wir jede Tensor T wie folgt zerlegen könnt
(ermittelte Schmidtzerlegung)

$$T_{n_1 n_2 \dots n_k} = \sum_m \lambda_m^{(k)} U_{n_1}^{(1m)} U_{n_2}^{(2m)} U_{n_3}^{(3m)} \dots U_{n_k}^{(km)}$$

Gibt es die Möglichkeit jede Tensor
so darzustellen?



Leider nein! Man kann kein Beispiel finden

Allerdings wird diskutiert (SIAM Review 51(3) 455-500
Kolda Bader)
als canonical decomposition

(CANDECOMP oder CP, PARAFAC)

z.B. für psychometric research, Sprachmass

\Rightarrow Vorgehen in die Verteilung im Erklärer, Filter z.B.
Optimierungsalgorithmen z.B. alternating Least Square

\Rightarrow Konvergenz nicht garantiert (muss ja nicht existieren)

AdA kein Manipuliert an Naturwerk möglich.