# Harmonic Inversion

Wiederholung:

$$C(t) \qquad c_n = C(t_n) = C(n\tau)$$

$$c_n = \langle \phi_0 | U^n | \phi_0 \rangle = \langle \phi_0 | e^{-in\tau\hat{\Omega}} | \phi_0 \rangle$$

Ziel

$$c_n = \sum_{k=1}^{K} d_k \, e^{-in\tau\omega_k}$$

lange Reihe.

$$|\Phi_n\rangle = \hat{U}^n |\phi_0\rangle \quad \text{mit } n = 0, 1, \ldots, M$$

Eigenwertproblem

$$\sum_{n=0}^{M} c_{n+n'+1} B_{nk} = u_k \sum_{n=0}^{M} c_{n+n'} B_{nk}$$

mit den Eigenwerten $u_k = e^{-i\tau\omega_k}$

$$d_k = \left( \sum_{n=0}^{N} B_{nk} c_n \right)^2$$

Bemerkung

- Das Problem wird im Prinzip durch Linear Algebra Problem gelöst!
- Falls $M > k-1$ (mehr als $2k$ Datenpunkte) überbestimmt $\Rightarrow$ Lösung durch Singular Value Decomposition
- Problem: $(M+1) \times (M+1)$ Eigenwert Problem, große Matrix, schlecht konditionierte Matrix $\Rightarrow$ schlechte Methode im Vergleich FFT mit $N \log N$ superschnell.

• Lösung: 1) Aus der linearen Kombination der Krylov-Vektoren lassen sich ähnlich auf die Koeffizienten zurückführen.

$$|\Psi_j\rangle = \sum_{n=0}^{M} A_{nj} |\phi_n\rangle$$

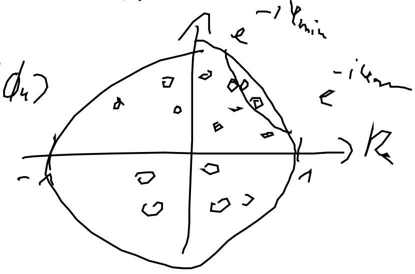
Hier sind U und S auch durch zu parametrisieren!

2) Beschränkung auf relevantes Frequenzintervall $[\omega_{min}, \omega_{max}]$

## Fourier Krylov Basis

Idee: Maximale Ordnung M für Basis und einige komplexe Zahlen der Form $z_j := e^{-i\varphi_j}$ $j = 1, 2, \dots, J$ auf dem Einheitskreis $\tau\omega_{min} < \varphi_j < \tau\omega_{max}$

$$(*)\quad |\Psi_j\rangle = |\Psi(z_j)\rangle = \sum_{n=0}^{M} e^{in\varphi_j} \underbrace{|\phi_n\rangle}_{\text{alte Krylov Basis}} := \sum_{n=0}^{M} \left(\frac{\hat U}{z_j}\right)^n |\phi_0\rangle$$




### Bemerkungen

1) Für eine hohe Sensitivität reicht es, dass $g(\varphi_j) > g(\omega_k)/\tau$ für die Dichte der Punkte

$\Rightarrow$ J sollte größer sein als die Anzahl der Basisvektoren, $\Psi(z_j)$ sollte größer als die Zahl der EV im Intervall $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ sein.

Im Allgemeinen kann die Anzahl der Basisvektoren J kleiner sein als K die Anzahl der Signalwerte.

2) Wir werten die geometrische Reihe in (*) aus:

$$|\Psi(z_j)\rangle = \frac{\mathbb{1} - \left(\frac{\hat U}{z_j}\right)^{M+1}}{\mathbb{1} - \left(\frac{\hat U}{z_j}\right)} |\phi_0\rangle \approx \sum_{u_k \approx z_j} \frac{1 - (u_k/z_j)^{M+1}}{\underbrace{1 - (u_k/z_j)}} |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|\phi_0\rangle$$

Achtung das sind Operatoren.

Wegen dem Nenner, werden nur wenige EV $|\Psi_k\rangle$ beitragen, nämlich nur die Nähe der Eins.

Damit kann mit der geeigneten Wahl von $\{z_j\}$, $j = 1, 2, \dots J$

ein kleiner Bereich der Eigenvektoren von U extrahiert wurde.

$\Rightarrow$ Wir können ein kleines Intervall wählen, um alles zu bestimmen.

$\Rightarrow$ Z ist nun wohlgestelltes Eigenwertproblem.

Eigenwertproblem

\# Vereinfachte Notation $U^{(p)}_{j,j'} = U^{(p)}(z_j, z_{j'}) = \langle \Psi(z_j) | \hat{U}^p | \Psi(z_{j'}) \rangle$

Dann ist $\underline{\underline{U}} := \underline{\underline{U}}^{(1)}$ und $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{U}}^{(0)}$

Eigenwertproblem $\underline{\underline{U}} \cdot \underline{B}_k = u_k \underline{\underline{S}} \cdot \underline{B}_k$ wird dann zu

$$\| \underline{\underline{U}}^{(p)} \cdot \underline{B}_k = u_k^p \underline{\underline{S}} \cdot \underline{B}_k \|$$

Jetzt alles mit Hilfe von $c_n$

$$U^{(p)}_{j,j'}(z, z') = \langle \Psi(z_j) | \hat{U}^p | \Psi(z_{j'}) \rangle = \sum_{\substack{n'=0 \\ n=0}}^{M} z^{-n} z'^{-n'} \langle \underline{\Phi}_0 | \hat{U}^n \hat{U}^{(n'+p)} | \Phi_0 \rangle$$

$$= \sum_{\substack{n'=0 \\ n=0}}^{M} \left(\frac{z'}{z}\right)^n c_{n+n'+p} z'^{-(n+n')}$$

Fall $z \neq z'$ 1. multiplizieren substituieren $l = n+n'$, $n' = l-n$

$$= \sum_{n=0}^{M} \sum_{l=n}^{n+M} \left(\frac{z'}{z}\right)^n c_{l+p} z'^{-l}$$

üb geometrische Reihe + weitere Tricks

$$U^p(z, z') = \frac{1}{z-z'} \Big( z \sum_{l=0}^{M} c_{l+p} z'^{-l} - z' \sum_{l=}^{M} c_{l+p} z^{-l}$$

$$- z^{-M} \sum_{l=M+1}^{2M} c_{l+p} z'^{M-l+1}$$

$$+ z'^{-M} \sum_{l=M+1}^{2M} c_{l+p} z^{M-l+1} \Big) \quad (z \neq z')$$

$$U^p(z, z) = \sum_{l=0}^{2M} (M - |M-l|+1) c_{l+p} z^{-l}$$

Bemerkung

1) Wir benötigen die $c_n$ für $n = p, p+1, \dots, 2M+p$

2) $U^{(p)}$ haben eine artige Struktur mit dominanter Diagonale und abfallenden offdiagonal.

3) Mit diesen Bausteinen kann das Eigenwertproblem gelöst werden für $\frac{\varphi_{min}}{\tau} < \mathrm{Re}\, \omega_k < \frac{\varphi_{max}}{\tau}$

[für ein kleines Intervall $\varphi_{min} < \varphi_j < \varphi_{max}$, $j = 1, 2, \dots$]

4) Die Amplituden zur Lösung des Problems sind:

$$d_k := \left( \sum_{j=1}^{J} B_{jk} \sum_{n=0}^{M} c_n z_j^{-n} \right)^2$$

Schlechte Genauigkeit daher Hilfe des Signals genutzt.

$$d_k^{1/2} := \langle \Upsilon_k | \Phi_0 \rangle = \langle \Upsilon_k | \left( \frac{\hat{U}}{u_k} \right)^{n'} | \Phi_0 \rangle \underset{\Upsilon_k}{=} \sum_{j=1}^{J} B_{jk} \langle \Psi_j | \left( \frac{U}{u_k} \right)^{n'} | \Phi_0 \rangle$$

Wir verwenden (#):

$$\| \; d_k = \left( \frac{1}{M+1} \sum_{j=1}^{J} B_{jk} \langle \Psi(z_j) | \Psi(u_k) \rangle \right)^2$$

$$= \left( \frac{1}{M+1} \sum_{j=1}^{J} B_{jk} U^0(z_j, u_k) \right)^2 \quad // \text{ mit den Datenpunkt}$$

Bemerkung

1) Achtung $U^{(p)} \neq U^p$, da Basis nicht kompatibel

Test spurious Eigenwerte, aber echte Eigenwerte

$$\underline{\underline{U}}^{(p)} \cdot \underline{B}_k = u_k \underline{\underline{U}}^{(p-1)} \cdot B_k$$

2) oft Basis fast linear abhängig.

Harmonic Inversion Kochrezept

1) Wähle Frequenzfenster $[\omega_{min}, \omega_{max}]$, das klein genug ist für die spektrale Analyse eines Signals $c_n = c(n\tau)$ $(n = 0, 1, \dots N)$

2) Wähle regelmäßiges Gitter $\tau\omega_{min} < \varphi_j < \tau\omega_{max}$, $j = 1, 2, \dots J$ mit dem richtigen Wert für J. Sinnvolle Wert $J = N\tau(\omega_{max} - \omega_{min})/(4\pi)$

3) Konstruiere 3 komplexe symmetrische Matrizen $U^{(p)}$ $(J \times J)$ für $p = 0, 1, 2, 3$

4) Löse Eigenwertproblem $\underline{\underline{U}}^{(1)} \cdot \underline{B}_k = u_k \underline{\underline{U}}^{(0)} \cdot B_k$ für $u_k = e^{-i\tau\omega_k}$ und $B_k$ (z.B. mit SVD)

5) Prüfe Eigenwerte $\| U^{(2)} - (u_k)^2 U^{(0)} B_k \| < \varepsilon$ für kleine $\varepsilon$

6) Entweder zu Schritt 7, oder neues Gitter

7) Berechne die Amplituden $d_k$

8) Verwende $\omega_k$ und $d_k$ um eine Idee des Spektrum zu erhalten

$$F(\omega) = \langle \Phi_0 | \frac{1}{\omega - U/\tau} | \Phi_0 \rangle = i \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$$

Problem Konvergenz zu langsam!

Bei schlechter Konvergenz Eigenwerte entfernen

$$F(\omega) \simeq i \sum_{n=0}^{N} \left( c_n \sum_{k=1}^{J} d_k u_k^n \right) g_n z^{-n} + i \sum_{k=1}^{J} \frac{d_k}{1 - u_k/z}$$

Windowfunktion

9) Weiteres Frequenzintervall