

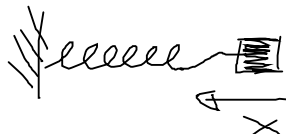
Photon Statistik II: Squeezed States

$$\begin{aligned}
 g^{(2)}(t,0) &= \frac{\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} = \frac{\langle a^\dagger (-1 + a^\dagger) a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} \\
 &= \frac{\langle (a^\dagger a)^2 \rangle - \langle a^\dagger a \rangle^2 + \langle a^\dagger a \rangle^2 - \langle a^\dagger a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} \\
 &= \frac{\langle n \rangle^2}{\langle n \rangle^2} + 1 - \frac{1}{\langle n \rangle} = \langle n \rangle^2, \quad \langle n \rangle = 1
 \end{aligned}$$

sehr gutes Review Knight and Loudon,
 J. Mod. Optics 34, 709
 (1987)

Vorüberlegung: harmonische Oszillatoren
 Heisenbergsche Unschärferel.

(i) $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$ (Hookesche Feder)

 Schwingungen
 Lösung ist bekannt

$$H = \hbar \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad \text{mit } a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right)$$

Eigenfunktionen $\xi = a f(\xi, m)$

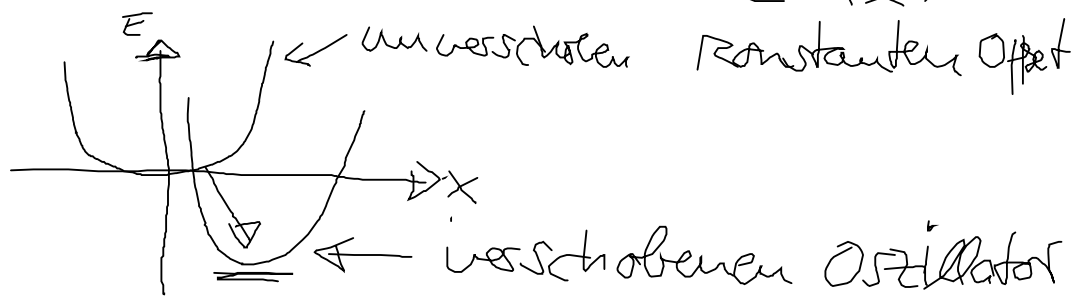
(ii) Messung mit Ladung und schalten
 ein statisches E -Feld

 $\Rightarrow E_0 \oplus$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} \kappa x^2 - e E_0 x \quad (\text{Energie eines geladenen Teilchens})$$

quadratische Ergänzung

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} \kappa \left(x - \frac{e E_0}{\kappa} \right)^2 - \frac{1}{2} \kappa \left(\frac{E_0}{\kappa} \right)^2$$



Was ist die Lösung?

$$a \rightarrow a + \alpha, \quad a^\dagger \rightarrow a^\dagger + \alpha^*$$

α geeignet, ist aber ein Skalar

Wir definieren eine Abbildung so, dass

$$\mathbb{D}_\alpha^{-1} a \mathbb{D}_\alpha = a + \alpha, \quad \alpha \text{ reell}$$

$$\mathbb{D} \mathbb{D}^{-1} = \mathbb{1}$$

$$\mathbb{D}_\alpha^{-1} H_0 \mathbb{D}_\alpha = \mathbb{D}^{-1} \hbar \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \mathbb{D}$$

$$= \hbar \omega \mathbb{D}^{-1} a^\dagger \mathbb{D} \mathbb{D}^{-1} a \mathbb{D} + \frac{1}{2} \hbar \omega$$

$$= \underbrace{\hbar \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)}_{\frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} \kappa x^2} + \underbrace{\hbar \omega \alpha}_{E_0} \underbrace{\left(a^\dagger + a \right)}_{= x} + \hbar \omega \alpha^2$$

"

$$= H_D$$

⇒ wir lösen das Problem, wenn wir die Abbildung D kennen

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi \rangle_0 = H_0 | \psi \rangle_0, \quad \frac{d}{dt} D = 0$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (D | \psi \rangle_0) = (D H_0 D^{-1}) (D | \psi \rangle_0)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi \rangle_D = H_D | \psi \rangle_D$$

wir wissen
$$e^{i\omega t a^\dagger a} \quad e^{-i\omega t a^\dagger a}$$

$$= e^{-i\omega t a}$$

$$e^{-\alpha A} e^{\alpha A} = \mathbb{1} - \alpha [A, \mathbb{1}] + \frac{\alpha^2}{2!} [A, [A, \mathbb{1}]]$$

$$e^{-\alpha a^\dagger} e^{\alpha a^\dagger} = a - \alpha [a^\dagger, a] + \frac{\alpha^2}{2!} [a^\dagger, [a^\dagger, a]] - \dots$$

$$= a - \alpha \underbrace{[a^\dagger, a]}_{=-1} + \frac{\alpha^2}{2!} \underbrace{[a^\dagger, [a^\dagger, a]]}_{=-1} = a + \alpha$$

$$D_\alpha = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \quad \text{Displacement Operator}$$

(Abstrahlung einer klassischen Ladungsverteilung)

Frage: Heisenberg $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |c|$

$$[A, B] = iC$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^\dagger) \quad , \quad p = \frac{1}{\sqrt{2}i} (a - a^\dagger)$$

$$\begin{aligned} [x, p] &= \frac{1}{4i} [a + a^\dagger, a - a^\dagger] \\ &= \frac{1}{4i} (-1 - 1) = \frac{i}{2}, \quad C = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$D_\alpha^{-1} |0\rangle = |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

Standardabweichung berechnen

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\ &= \langle \alpha | \frac{1}{4} (a + a^\dagger)^2 | \alpha \rangle - \left(\langle \alpha | \frac{1}{2} (a + a^\dagger) | \alpha \rangle \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Delta p \Delta x = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \gg \frac{1}{2} C = \frac{1}{4}$$

Kohärente oder verschobene Zustand ist von minimaler Unschärfe

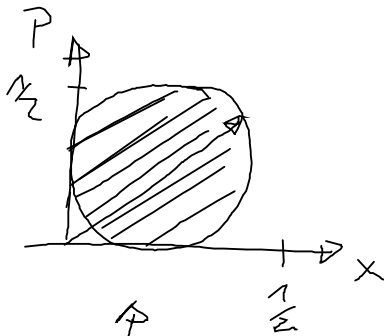
→ verschobenes Jaynsches Wellenpaket

geometrisch: $D_\alpha = e^{z_k(\text{Im}[\alpha x] - \text{Re}[\alpha P])}$

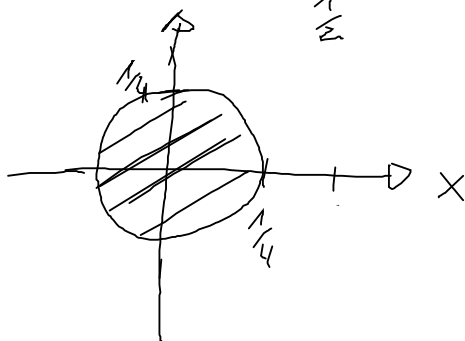
↑
Eigenwerte



interessant, Phase nur wohldefiniert wenn $|\alpha| \gg 1$



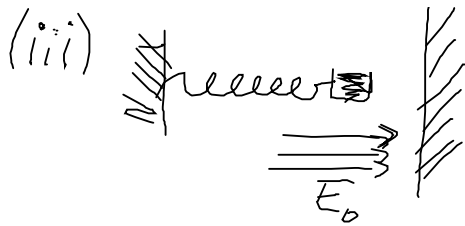
$$\phi \in [0, \pi/2]$$



$$\phi \in [0, 2\pi]$$

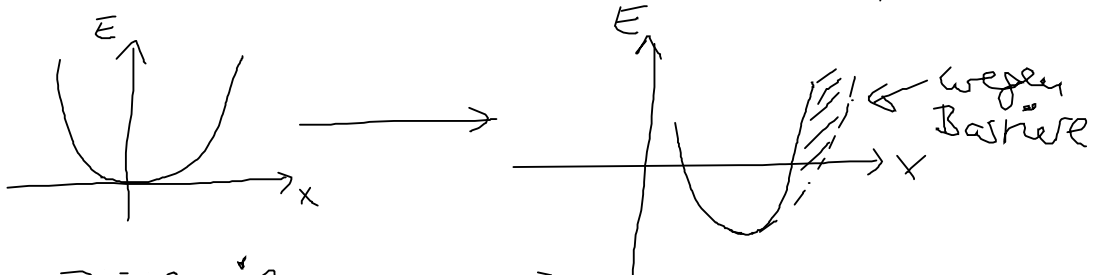
$$\alpha = |\alpha| e^{i\phi}$$

wo Quantenfluktuationen groß sind gegen die Mittelwerte (das eigentliche Quantenlimit), Phase hochproblematisch



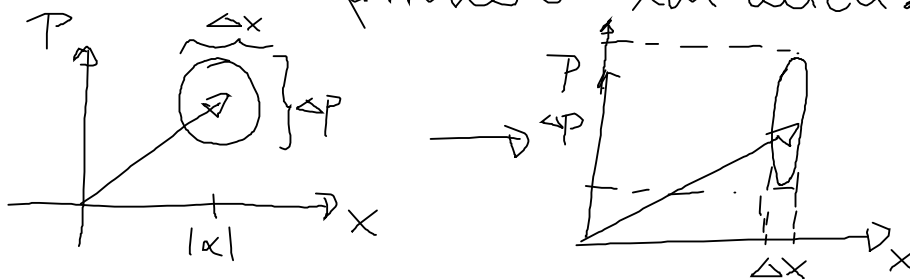
Und eine Potential -
schwelle, die die
harmonische Oszillation
eingeschränkt

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} \lambda x^2 - e E_0 (ax - bx^2)$$



Ziel ist es $(\Delta x)^2 < \frac{1}{4}$ $(\Delta p)^2 < \frac{1}{4}$
 so, dass $\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{4}$ erhalten bleibt
 → das ist Squeezing

Also, wir verschieben nicht nur
den Kreis im Phasenraum,
wir deformieren ihn auch.



Konstruiere die Abbildung

$$|\alpha, \xi\rangle = S(\xi) D(\alpha) |0\rangle$$

$$S(\xi) = e^{\frac{1}{2}\xi^* a^2 - \frac{1}{2}\xi a^{+2}}, \quad \xi = r e^{i\phi}$$

$$S_\xi^\dagger a S_\xi = a \cosh(r) - a^\dagger e^{i\phi} \sinh(r)$$

Δp oder Δx ausrechnen

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{4} e^{-2r}, \quad (\Delta p)^2 = \frac{1}{4} e^{2r}, \quad \phi \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{4} \quad (\text{minimale Unschärfe})$$

Beispiel: $H = \hbar \eta (g a^{+2} - g^* a^2)$
(ist effektive Beschreibung)

Ziel: Squeezed State \rightarrow Fock State

$$g^{(2)}(t, 0) = \langle n \rangle^2, \quad |d|^2 = 1$$

$$\langle \Delta n \rangle^2 = 0 \quad \text{für Fockstate}$$

$$\langle a^\dagger a a^\dagger a \rangle - (\langle a^\dagger a \rangle)^2 =$$

$$= \langle n | a^\dagger a a^\dagger a | n \rangle - n^2 = 0$$

$$\tilde{a} \rightarrow a \cosh(s) - a^\dagger e^{i\phi} \sinh(s)$$

$$0 \leq s \leq \infty, \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \langle a^\dagger a \rangle \\ &= \langle \alpha, \xi | a^\dagger a | \alpha, \xi \rangle \\ &= \langle 0 | S_\xi^{-1} \underbrace{D_\alpha^{-1} a^\dagger D_\alpha}_{= a^\dagger + \alpha^*} \underbrace{D_\alpha^{-1} a D_\alpha}_{= a + \alpha} S_\xi | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$= |\alpha|^2 + \alpha^* \langle 0 | S^{-1} a S | 0 \rangle + \alpha \langle 0 | S^{-1} a^\dagger S | 0 \rangle + \langle 0 | S^{-1} a^\dagger a S | 0 \rangle$$

$$= |\alpha|^2 + \alpha^* \underbrace{\langle 0 | a^\dagger | 0 \rangle}_{= 0} \cosh(s) + \dots$$

$$= |\alpha|^2 + \sinh^2(s)$$

so berechnet man $\langle n^2 \rangle$
und erhält die Varianz

$$\langle n \rangle^2 = |\alpha|^2 \left\{ e^{-2s} \cos^2\left(\theta - \frac{1}{2}\phi\right) + e^{2s} \sin^2\left(\theta - \frac{1}{2}\phi\right) \right\}$$

$$\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$$

$$\text{jetzt sei } |\alpha|^2 = 1, \quad \begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \end{aligned}$$

$$\langle n \rangle^2 = \frac{1}{2} \left\{ 2 \cosh(2s) - 2 \cos(2\theta - \phi) \right\}$$

$$\stackrel{!}{=} 0, \text{ wobei es nicht, wenn } \langle n \rangle^2 < 1 \text{ (nichtklassische Zustand)}$$

$$\cos(2\theta - \phi) = \tanh(s) + 2 \sinh(s) \cos^2(s)$$

für kleine s geht rechte Seite gegen Null

Teilchenzahl-Squeezing genau dann, wenn $g^{(2)}(t, 0) < 1$

für zu hohe s divergiert das Ganze ($e^s \rightarrow \infty$)



$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\Omega \{ e^{i\Delta t} \sigma_+ + \sigma_- e^{-i\Delta t} \}, \rho] + \Gamma \{ 2\sigma_- \rho + \rho \sigma_- - \sigma_- \rho + \rho \sigma_- \}$$

$$\sigma_- \equiv |0\rangle\langle 1|$$

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z, \quad \sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)$$

$$\sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)$$

$$\Delta\sigma_1 \Delta\sigma_2 \geq \frac{1}{2} |\langle \sigma_3 \rangle|, \quad \sigma_x = \frac{1}{2}\sigma_x$$

Squeezing $(\Delta\sigma_1)^2 < \frac{1}{2} |\langle \sigma_3 \rangle|$, $\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_x \sigma_x - \sigma_y \sigma_y)$

Steady-State

$$\langle \sigma_1 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\kappa \delta}{1 + \delta^2 + \kappa^2}, \quad \kappa = \sqrt{2} \frac{\Omega}{\Gamma}, \quad \delta = \frac{\Delta}{\Gamma}$$

$$\begin{aligned}\langle \sigma_3 \rangle &= 2 \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle - 1 \\ &= -\frac{\Delta}{2} (1 + \delta^2) \frac{1}{1 + \delta^2 + z^2}\end{aligned}$$

$$\langle \sigma_1^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{\sigma_x}{2} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \underbrace{\langle \sigma_x^2 \rangle}_{=11} = \frac{1}{4}$$

$$\langle \Delta \sigma_1 \rangle^2 = \langle \sigma_1^2 \rangle - \langle \sigma_1 \rangle^2$$

$$\langle \Delta \sigma_1 \rangle^2 < \frac{1}{2} |\langle \sigma_3 \rangle| = \frac{1}{4} (1 + \delta^2) \frac{1}{1 + \delta^2 + z^2}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{z^2 \delta^2}{(1 + \delta^2 + z^2)^2} < \frac{1}{4} \frac{(1 + \delta^2)}{1 + \delta^2 + z^2}$$

$$z^2 - \frac{2z^2 \delta^2}{1 + \delta^2 + z^2} < 0$$

$$r^2 + 2\Omega^2 < 4\delta^2$$

Δ ist einstellbar und Ω auch,
d.h. squeezing ist vorhanden,
aber Zustand ist nicht
von minimales Unsicherheit
[Walls & Zoller, PRL 47, 709 (1981)]
gesqueezter Dipol