

Wkt =

$$\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}) = e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} - \frac{m}{2i\hbar^2} \int d\underline{r}' \frac{e^{\pm i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}')} V(\underline{r}') \psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Lippmann-Schwinger-Gl. (Scatteringpotential
am Ursprung lokalisiert)

Streuamplitude ($M \rightarrow \infty$)

$$f^{(\pm)}(k_{\text{ein}}, \underline{k}) = -\frac{m}{2i\hbar^2} \int d\underline{r}' e^{\mp i\underline{k}_{\text{ein}} \cdot \underline{r}'} V(\underline{r}') \psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}')$$

asymptotisch exakt!

Born'sche Näherung: Ersetze $\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}$ im Integral durch $e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}'}$

$$\Rightarrow f_{\text{Born}}^{(+)}(k_{\text{ein}}, \underline{k}) = -\frac{m}{2i\hbar^2} \tilde{V}(\underline{q}), \quad \underline{q} = \underline{k}_{\text{ein}} - \underline{k}$$

Fouriertransf. des Streupotentials

Abschätzung der Gültigkeit der Born'schen Näherung:

beachte: Born'sche Näherung entspricht der 1. Iteration der Lippmann-Schwinger-Gl.

$$\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}) = e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} - \frac{m}{2i\hbar^2} \int d\underline{r}' \frac{e^{i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}')} V(\underline{r}') \psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

(Abbruch nach dem ersten Term)

$$\left(e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} - \frac{m}{2i\hbar^2} \int d\underline{r}'' \frac{e^{i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}'')} V(\underline{r}'')}{|\underline{r}-\underline{r}''|} + \dots \right)$$

Damit das Sinn macht, sollte gelten

$$\textcircled{*} \left| \left(-\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{dr'}{|r-r'|} e^{i k(r-r')} V(r') e^{i k r'} \right) \right| \ll \left| \psi(r) \right| = 1$$

d.h. Zweiter Term \ll erster Term

Auswertung von $\textcircled{*}$ für kugelsymmetrisches Potential $V(r) = V(r')$

und setze $r = 0$

(die Bedingung $\textcircled{*}$ ist dann erst abet für $r > 0$ erfüllt!)

$$\Rightarrow \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \int dr' \frac{1}{r'} e^{i k r'} e^{i k r' \cos \alpha} V(r') \right| \ll 1$$

$$\underbrace{\int_0^\infty dr' r'^2}_{2\pi} \underbrace{\int_{-1}^{+1} d(\cos \alpha)}_{2} \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \frac{2\pi \cdot 2}{i k} \int_0^\infty dr' V(r') e^{i k r'} (e^{i k r'} - e^{-i k r'}) \right| \ll 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \int_0^\infty dr' V(r') (e^{2i k r'} - 1) \right| \ll \frac{\hbar^2 k}{2 m} \textcircled{**}$$

Betrachte 2 Fälle

a) Hohe Energien

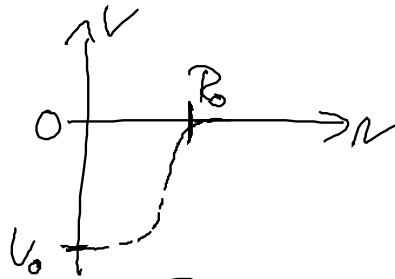
$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \text{groß}$$

$\Rightarrow e^{z i k r}$ (um Null) sehr rasch oszillierende Funktion

$$\int_0^{\infty} dr' V(r') e^{z i k r'} \approx 0$$

Aus **(**)** folgt dann - $\int_0^{\infty} dr V(r) \ll \frac{\hbar^2 k}{2m}$
 Raumintegral über $V(r)$

z.B. $V(r)$ Topfpotential



$$\Rightarrow \int_0^{\infty} dr V(r) \approx V_0 R_0 \quad \Rightarrow \quad V_0 R_0 \ll \frac{\hbar^2 k}{2m}$$

erfüllt, falls Stumpfpotential (schwach (V_0 klein) und ~~aber~~ nur wenig ausgedehnt ist (R_0 klein))

b) Kleine Energien, (U klein)

entwickle Exponentialfunktion $e^{z i k n'} \approx 1 - z i k n' + \dots$

aus $(*)$ $\left| z U \int_0^\infty dr' r' V(r') \right| \ll \frac{\hbar^2 U}{2m}$

Staupotential muß sehr viel kleiner sein als die durchhin schon kleine Teilchenenergie

→ sehr einschränkende Beding

(ausbild. Diskussion siehe z.B. Nolte's QM 2)

Fazit: Bornsche Näherung ist tendenziell besser im Fall hoher Teilchenenergie und schwacher Staupotentiale!

III.4. Formale Störtheorie und Green'sche Funktion

Wir führen zunächst eine Verallgemeinerung der

Green'schen Funktion zum freien Hamiltonian ein, $\hat{G}_0(E) = \frac{1}{E - \hat{H}_0}$

so dass anstatt \hat{H}_0 der volle Hamiltonian \hat{H} vorkommt.

mit $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ räuml. lokalisiertes Einpartikel-Staupotential

$$\hat{G}(z) = \frac{1}{z - \hat{H}}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (*)$$

hier werde E gerade durch eine komplexe Zahl ersetzt, um Fälle mit $z = E \pm i\epsilon$ behandeln zu können

Umkehr von $\hat{\otimes}$

$$\hat{G}(z) = (z - \hat{H})^{-1} = (z - \hat{H}_0 - \hat{V})^{-1} = \left((\hat{G}_0(z))^{-1} - \hat{V} \right)^{-1}$$

$$= \left((\hat{G}_0(z))^{-1} (\hat{1} - \hat{G}_0(z) \hat{V}) \right)^{-1}$$

benutze
 $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$$\hat{G}(z) = (\hat{1} - \hat{G}_0(z) \hat{V})^{-1} \hat{G}_0(z)$$

benutze Formel für geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1$$

hier $a_0 \Rightarrow \hat{G}_0(z)$, $q \Rightarrow \hat{G}_0(z) \hat{V}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k a_0 = \frac{a_0}{1-q}$$

$$\Rightarrow \hat{G}(z) = \hat{G}_0(z) + \underbrace{\hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}_0(z)}_{k=1} + \underbrace{\hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}_0(z)}_{k=2} + \dots$$

$\hat{\otimes}$

$$= \vec{G}_0(z) + \vec{G}_0(z) \vec{V} \left(\vec{G}_0(z) + \vec{G}_0(z) \vec{V} \vec{G}_0(z) + \dots \right)$$

das ist wieder $\vec{G}(z)$!!

$$\Rightarrow \boxed{\vec{G}(z) = \vec{G}_0(z) + \vec{G}_0(z) \vec{V} \vec{G}(z)}$$

exist!!

Dyson-Gleichung (kein Einheitsmatrixproblem)

liefert Zusammenhang zw.
 $\vec{G}(z)$ und $\vec{G}_0(z)$, ist implizit

Gl. ist aber auch relevant in
der Vielteilchentheorie!!

Äquivalent kann man wie folgt aufsummieren.

$$\textcircled{*}: \vec{G}(z) = \vec{G}_0(z) + \vec{G}_0(z) \vec{V} \vec{G}_0(z) + \vec{G}_0(z) \vec{V} \vec{G}_0(z) \vec{V} \vec{G}_0(z) + \dots$$

$$= \vec{G}_0(z) + \vec{G}_0(z) \left[\vec{V} + \vec{V} \vec{G}_0(z) \vec{V} + \dots \right] \vec{G}_0(z)$$

definiere

$$\vec{T}(z) = \vec{V} + \vec{V} \vec{G}_0(z) \vec{V} + \vec{V} \vec{G}_0(z) \vec{V} \vec{G}_0(z) \vec{V} + \dots$$

"T-Matrix"

$$= \vec{V} + \left(\vec{V} + \vec{V} \vec{G}_0(z) \vec{V} + \dots \right) \vec{G}_0(z) \vec{V}$$

$$\boxed{\vec{T}(z) = \vec{V} + \vec{T}(z) \vec{G}_0(z) \vec{V}}$$

exist, implizit,
liefert Zusammenhang
zw. T-Matrix und \vec{V}

Dann folgt (durch Kombination)

$$\hat{G}(z) = \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z) \hat{T}(z) \hat{G}_0(z)$$

Durch Kenntnis der T -Matrix kann man also die volle Green'sche Funktion konstruieren!

Umformung der Dyson-Gleichung

$$\hat{G}(z) = \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}(z)$$

$$\Rightarrow \langle \underline{N} | \hat{G}(z) | \underline{N}' \rangle = \langle \underline{N} | \hat{G}_0(z) | \underline{N}' \rangle$$

$$+ \langle \underline{N} | \hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}(z) | \underline{N}' \rangle$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 Entschieden von Anfangszuständen

$$\Rightarrow \langle \underline{N} | \hat{G}(z) | \underline{N}' \rangle$$

$$= \langle \underline{N} | \hat{G}_0(z) | \underline{N}' \rangle + \int d\underline{N}_1 \int d\underline{N}_2 \langle \underline{N} | \hat{G}_0(z) | \underline{N}_1 \rangle \langle \underline{N}_1 | \hat{V} | \underline{N}_2 \rangle \cdot \langle \underline{N}_2 | \hat{G}(z) | \underline{N}' \rangle$$

benutze, dass \hat{V} Skalarpotential ist und nur auf eine Koordinate wirkt!

$$\begin{aligned} \langle N_1 | \hat{V} | N_2 \rangle &= \hat{V}(N_2) \langle N_1 | N_2 \rangle \\ &= \hat{V}(N_2) \delta(N_1 - N_2) \\ &= \hat{V}(N_1) \delta(N_1 - N_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle N | \hat{G}(z) | N' \rangle &= \hat{G}(N, N'; z) \\ &= \langle N | \hat{G}_0(z) | N' \rangle \\ &\quad + \int dN_1 \langle N | \hat{G}_0(z) | N_1 \rangle \hat{V}(N_1) \langle N_1 | \hat{G}(z) | N' \rangle \end{aligned}$$

Das ist die Dyson-Gl. in Ortsdarstellung, also als Integralgleichung !!

beachte: Gl. ist implizit
Sie besitzt starke Ähnlichkeit mit der
Lippmann-Schwinger-Gl. !

dort hatten wir:

$$|\psi_{\pm}^{(\pm)}\rangle = |\psi_{\pm}\rangle + \hat{G}_0^{(\pm)}(z) \hat{V} |\psi_{\pm}^{(\pm)}\rangle$$

einfallende,
ebene Welle

Umschreiben der Lippmann-Schwinger-Gl., so dass die volle Green'sche Funktion darin vorkommt:

dazu Iteration

$$\begin{aligned}
 |\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}\rangle &= |\underline{k}\rangle + \hat{G}_0^{(\pm)}(E) \hat{V} \left(|\underline{k}\rangle + \hat{G}_0^{(\pm)}(E) \hat{V} |\underline{k}\rangle + \dots \right) \\
 &= |\underline{k}\rangle + \left[\hat{G}_0^{(\pm)}(E) \hat{V} + \hat{G}_0^{(\pm)}(E) \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)}(E) \hat{V} + \dots \right] |\underline{k}\rangle \\
 &= |\underline{k}\rangle + \left[\hat{G}_0^{(\pm)}(E) + \hat{G}_0^{(\pm)}(E) \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)}(E) + \dots \right] \hat{V} |\underline{k}\rangle
 \end{aligned}$$

das ist wieder die volle Green'sche Funktion!

Wir erhalten also mit Hilfe der (iterierten) Dyson-Gl.:

$$|\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}\rangle = |\underline{k}\rangle + \hat{G}^{(\pm)}(E) \hat{V} |\underline{k}\rangle$$

Im Gegensatz zur bisherigen Formulierung der Lippmann-Schwinger-Gl. tauchen auf der rechten Seite nun einfache ebene Wellen $|\underline{k}\rangle$ auf ... Keine implizite Gl. mehr!

Aber: Statt \hat{G}_0 taucht jetzt die volle Green'sche Funktion auf

Streuamplitude

wir hatten vor Born'scher Näherung

$$f^{(+)}(k_{\text{er}}, \underline{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\underline{r}' e^{-i\underline{k}_{\text{er}} \cdot \underline{r}'} V(\underline{r}') \psi_{\underline{k}}^{(+)}(\underline{r}') \\ = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \underline{k}_{\text{er}} | \hat{V} | \psi_{\underline{k}}^{(+)} \rangle$$

Setze wieder

$$|\psi_{\underline{k}}^{(+)}\rangle = |\underline{k}\rangle + \hat{G}_0^{(+)}(E) \hat{V} |\underline{k}\rangle + \hat{G}_0^{(+)}(E) \hat{V} \hat{G}_0^{(+)}(E) \hat{V} |\underline{k}\rangle + \dots$$

$$\Rightarrow f^{(+)}(k_{\text{er}}, \underline{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \underline{k}_{\text{er}} | \hat{V} (|\underline{k}\rangle + \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} |\underline{k}\rangle + \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} |\underline{k}\rangle) \\ = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \underline{k}_{\text{er}} | \underbrace{\hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} + \dots}_{\text{das ist gerade die T-Matrix!}} | \underline{k} \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{(+)}(k_{\text{er}}, \underline{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \underline{k}_{\text{er}} | \hat{T}^{(+)}(E) | \underline{k} \rangle} \quad \text{erfolgt (asymptotisch) } \rightarrow 0$$

Vergleiche mit der Born'schen Näherung:

$$f^{(+)}(k_{\text{er}}, \underline{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \underline{k}_{\text{er}} | \hat{V} | \underline{k} \rangle$$

Im exakten Resultat kommt also die volle T -Matrix vor, in der Born'sche Näherung dagegen nur das "naechste Potential" V