Wh: $\hat{H}_{\text{Phonon}} = \sum_{\underline{k},s} \hbar \omega_s(\underline{k}) \left(\hat{a}^+_{\underline{k},s} \hat{a}_{\underline{k},s} + \frac{1}{2} \right)$

Phononensystem (Bosonen!)

$$\left[\hat{a}_{\underline{k},s} , \hat{a}^+_{\underline{k}',s'} \right] = \delta_{\underline{k}\underline{k}'} \delta_{ss'}$$

Quantisierung des "freien" elektromagnetische Felds

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A} \,, \quad \underline{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial}{\partial t} \underline{A}$$

Wir betrachten zunächst $\rho(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r},t) = 0$

und Coulombeichung, $\nabla \cdot \underline{A} = 0$

$$\Delta \phi = 0 \quad \left(-\frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0} \right) \,, \quad -\Delta \underline{A} + \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} + \frac{1}{c^2} \nabla \dot{\phi} = 0 \quad (\mu_0 \underline{j}(\underline{r},t))$$

Keine Retardierung $\Rightarrow$ wir können $\phi = 0$ setzen $\forall t$

$$\Rightarrow -\Delta \underline{A} + \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} = 0$$

$\underline{A}$ in Eigenmoden: $\underline{A}(\underline{r},t) = \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(a_k \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) e^{-i\omega_k t} + a_k^* \underline{u}_{\underline{k}}^*(\underline{r}) e^{i\omega_k t} \right)$

alles noch klassisch!

$$\nabla \cdot \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) = 0 \,, \quad \Delta \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{r}) = 0$$

Energiedichte: $U = \int d\underline{r} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \underline{B}^2 \right)$

$$= \dots = \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}} \hbar \omega_k \left(a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* + a_{\underline{k}}^* a_k \right)$$

Quantisierung ("ad hoc")

$$a_{\underline{k}} \rightarrow \hat{a}_{\underline{k}} \,, \quad a_{\underline{k}}^* \rightarrow \hat{a}_{\underline{k}}^+$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \sum_k \hbar \omega_{\underline{k}} \left(\hat{a}^+_{\underline{k}} \hat{a}_{\underline{k}} + \frac{1}{2} \right)$$

System von Photonen (Bosonen!)

~~Gen~~ Systematische Herleitung von $\hat{H}$ über Lagrangedichte möglich

$$L = \int d\underline{r}\, \mathcal{L} \qquad \text{mit} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_i, \varphi_{i,\mu})$$

Raumintegral

Felder

$$\varphi_{i,\mu} = \frac{\partial \varphi_i(\underline{r},t)}{\partial x^\mu}$$

~~Wirkungsfkt~~

Wirkung $S = \int dt\, L$ erfüllt Extremalprinzip!

mit $x^\mu = (t, x, y, z)$

$$\Rightarrow \varphi_{i,0} = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_i = \dot{\varphi}_i$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{i,\mu}}}_{\text{Einstein'sche Summenkonvention}} = 0$$

(völlig analog zur Teilchenmechanik
$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \Big)$$

Konjugiertes Impulsfeld zum Feld φ_i

$$\Pi_{\varphi_i} = \Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} \qquad \left(\text{analog zu } p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

Übergang zur Hamiltonfunktion (über Hamiltondichte)

$$H = \int d\underline{r}\, \mathcal{H} \quad \text{mit} \quad \underbrace{\mathcal{H}}_{\text{Hamiltondichte}} = \sum_i \dot{\varphi}_i \Pi_i - \underbrace{\mathcal{L}}_{\text{Lagrangedichte}}$$

$$\left(\text{analog } H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L\right)$$

<u>Quantisierung ("Kochrezept")</u>

ersetze $\varphi_i \rightarrow \hat{\varphi}_i$, $\Pi_i \rightarrow \hat{\Pi}_i$

$\varphi_i^* \rightarrow \hat{\varphi}_i^+$

Vertauschungsregeln (als Folge der klass. Vertauschungsregeln)

$$\left[\hat{\varphi}_i(\underline{r},t), \hat{\Pi}_j(\underline{r}',t)\right]_{\pm} = i\hbar\, \delta_{ij}\, \delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

$[\ldots]_+$: Fermionen (halbzahliger Spin)

$[\ldots]_-$: Bosonen (ganzzahliger Spin)

Anwendungsbeispiel Schrödingerfeld (hier nur kurz)

Ziel: Anwendung der Lagrange-Technik zur Herleitung der Schrödingergl.

Die Felder φ_i sind jetzt φ, φ^*

Ansatz: $\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\varphi^* \dot{\varphi} - \dot{\varphi}^* \varphi\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3} \varphi_{,k}\varphi^*_{,k} - V(\vec{r})\varphi^*\varphi$

(muß häufig geraten werden!)

Euler-Lagrange-Gl. mit $\varphi_{,k} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ räumliche Ableitungen

$$\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*}} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}^*} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*_{,k}} = 0$$

$$\frac{i\hbar}{2}\dot{\varphi} - V\varphi + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \frac{\hbar^2}{2m}\underbrace{\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{l=1}^{3}\varphi_{,l}\,\delta_{kl}}_{\sum_k \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar\dot{\varphi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2} + V\varphi}$$ Schrödinger-gl.!

Konjugierter Impuls: $\Pi_{\varphi^*} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}^*} = \frac{i\hbar}{2}\varphi$

→ Hamiltondichte

Quantisierung führt auf Hamiltonoperator der Form

$$\hat{H} = \int d\underline{r} \; \hat{\psi}^+(\underline{r},t)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\hat{\psi}(\underline{r},t)$$

Feldoperatoren, siehe Kap 2 Quantisierung!

IV. 3.2. Lagrangedichte für elektromagnet. Felder, Hamiltonian

a) Elektrostatik

Interessierendes Feld: $\underline{E} = -\nabla\phi$

Ansatz für Lagrangedichte:

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}(\nabla\phi)^2}_{\substack{\underline{E}^2 \\ \text{Energiedichte des elektrostat. Felds}}} - \underbrace{\rho(\underline{r})\phi(\underline{r})}_{\text{potentielle Energie einer Ladung im Feld}}$$

$\rho(\underline{r})$ ist fest vorgegeben!

$$(\text{"}\mathcal{L} = T - U\text{"})$$

Lagrange-Gl.: das relevante Feld ist $\phi(\underline{r})$ (nicht $\rho(\underline{r})$, da dieses fest vorgegeben!)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,k}} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{mit } \phi_{,k} = \frac{\partial\phi}{\partial x_k}$$

$$-\rho(\underline{r}) - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{l=1}^{3}\frac{\varepsilon_0}{2}2\frac{\partial\phi}{\partial x_l}\delta_{kl} \stackrel{!}{=} 0$$

$$-\rho(\underline{r}) - \varepsilon_0 \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x_k}}_{-E_k} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$ Gauss'sches Gesetz der Elektrostatik.

b) Magnetostatik:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\mu_0} \underbrace{(\nabla \times \underline{A}(\underline{r}))^2}_{(\underline{B})^2} - \underline{j}(\underline{r}) \cdot \underline{A}(\underline{r})$$

$\Rightarrow$ liefert $\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j}(\underline{r})$

c) Elektrodynamik

hier $\underline{E} = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}$, $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$

"erster Versuch" für die Lagrangedichte: (Einfache Addition der magnetische und elektr. Anteile)

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{\varepsilon_0}{2}(\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2 + \frac{1}{2\mu_0}(\nabla \times \underline{A})^2 - \rho\phi - \underline{j} \cdot \underline{A}$$

liefert nicht alle Maxwell-Gl. richtig!

Richtige Lagrangedichte:

$$\circledast \quad \mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} \underbrace{(\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2}_{\underline{E}^2} - \frac{1}{2\mu_0} \underbrace{(\nabla \times \underline{A})^2}_{\underline{B}^2} - \rho\phi + \underline{j} \cdot \underline{A}$$

(Zeige das später noch explizit für den Fall $\rho = \underline{j} = 0$)

Bemerkungen zu ⊛

- Die Feldvariablen sind $\phi(\underline{r},t)$ und $A_k(\underline{r},t)$ mit $k=1,2,3$

Die Quellen $\rho(\underline{r},t)$ und $\underline{j}(\underline{r},t)$ sind vorgegeben!

- Euler-Lagrange-Gl. bzgl. ϕ führt auf $\nabla\cdot\underline{E} = +\rho/\varepsilon_0$
- " " bzgl. der Komponenten von $\underline{A}$ führt auf
$$\nabla\times\underline{B} = \mu_0\underline{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\underline{E}}{\partial t}$$

- Die beiden anderen Maxwell-Gl. folgen einfach aus den Definitionen

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}} \Rightarrow \nabla\times\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$$
$$\underline{B} = \nabla\times\underline{A} \Rightarrow \nabla\cdot\underline{B} = 0$$

- Die Lagrangedichte ⊛ kann auch in relativistisch kovarianter Form geschrieben werden!

benutze $$\frac{\varepsilon_0}{2}\underline{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\underline{B}^2 = -\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

mit $F_{\mu\nu}$ Komponente des Feldstärketensors, dieser enthält die Komponenten von $\underline{E}, \underline{B}$

$$\rho\phi - \underline{j}\cdot\underline{A} = j^\mu A_\mu$$

mit $j^\mu \hat{=} (c\rho, \underline{j})$

$A^\mu = (\frac{1}{c}\phi, \underline{A})$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu}$$ Umformulierung von ⊛

d) Speziell: Freies Strahlungsfeld

sei $\rho(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r},t) = 0$

Aus (*)

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\nabla\phi + \dot{\underline{A}}\right)^2 - \frac{1}{2\mu_0}(\underbrace{\nabla\times\underline{A}}_{\underline{B}})^2$$

mit Coulombeichung $(\nabla\cdot\underline{A} = 0)$ können wir $\phi = 0$

$$\Rightarrow \underline{E} = -\dot{\underline{A}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}\dot{\underline{A}}^2 - \frac{1}{2\mu_0}(\nabla\times\underline{A})^2} \quad (**)$$

Feldvariablen sind die Komponente von $\underline{A}$

Euler-Lagrange-Gl.:

$$\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_k}}_{0} - \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_k}}_{\varepsilon_0\dot{A}_k} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{k,j}} = 0 \qquad k = 1,2,3$$

$$A_{k,j} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j}$$

z.B. $k=1$: $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial A_1}{\partial x_1}} = 0$

$$\boxed{(\nabla\times\underline{A})^2 = (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2)^2 + \dots}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial A_1}{\partial x_2}} = \frac{1}{2\mu_0}\,2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}A_1\right)(-1) = -(\underline{B})_3$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial A_1}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_3}{\partial x_2} + \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_2}{\partial x_3} = -\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\underline{B})_1$$

aus Euler-Lagrange

$$\Rightarrow -\varepsilon_0 \ddot{A}_k - \frac{1}{\mu_0}\Big(\nabla\times\underbrace{(\nabla\times\underline{A})}_{\underline{B}}\Big)_k = 0$$

benutze : $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\underline{A}) = \nabla\underbrace{(\nabla\cdot\underline{A})}_{\text{Null wg. Coulombeichung}} - \Delta\underline{A}$

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{c^2}\ddot{A}_k + \Delta\underline{A} = 0}$$ wie gefordert!

Zurück zu $\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}\dot{\underline{A}}^2 - \frac{1}{2\mu_0}(\nabla\times\underline{A})^2$

Kanonisch konjugierte Impulse:

$$\Pi_{A_k} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_k} = \varepsilon_0\dot{A}_k = -\varepsilon_0 E_k$$

Hamiltondichte

$$\mathcal{H} = \sum_k \dot{A}_k\Pi_{A_k} - \mathcal{L} = \sum_k \varepsilon_0(\dot{A}_k)^2 - \frac{\varepsilon_0}{2}\dot{\underline{A}}^2 + \frac{1}{2\mu_0}(\nabla\times\underline{A})^2$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\underline{B}^2$$

$$\Rightarrow H = \int d\underline{r}\,\frac{\varepsilon_0}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}(\underline{r},t)\Big)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\big(\nabla\times\underline{A}(\underline{r},t)\big)^2$$

$$\underline{A} \to \hat{\underline{A}}$$

$$\underline{E} = -\dot{\underline{A}} \longrightarrow \hat{\underline{E}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{H} = \int d\underline{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{\underline{A}}(\underline{r},t) \right)^2 + \frac{1}{2\mu_0} \left(\nabla \times \hat{\underline{A}}(\underline{r},t) \right)^2 \right)}$$

Das ist der Hamiltonian des freien Strahlungsfeldes!
Er ist konsistent mit dem Ausdruck, den wir vorher auf der Basis der klass. Energiedichte ($u \sim \int d\underline{r} (\underline{E}^2 + \underline{B}^2)$) geraten hatten!

IV. 3.3. Kopplung zwischen Teilchen und Feldern

Wh: Betrachte zunächst 1 Teilchen, klass. im elektromagnetischen Feld

Lagrangefunktion: $\boxed{L = \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2 - q\,\phi(\underline{r},t) + q\,\dot{\underline{r}} \cdot \underline{A}(\underline{r},t)}$
(nicht relativistisch) $\rightarrow$ klass. Mechanik

Euler-Lagrange-Gl. $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \underline{r}} \overset{!}{=} 0$

führt auf die BWGL. $m\ddot{\underline{r}} = \underbrace{q\,\underline{E}(\underline{r},t) + \dot{\underline{r}} \times \underline{B}}_{\text{Lorentzkraft}}$

Bemerkung

- Verallgemeinerung auf relativist. Fall: (hier ohne Beweis)

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\underline{r}}^2}{c^2}} - q\phi + q\dot{\underline{r}}\cdot\underline{A}(\underline{r},t)$$

- Viele Teilchen, nicht-relativistisch

$$L = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}m\dot{\underline{r}}_i^2 - q_i\phi(\underline{r}_i,t) + q_i\dot{\underline{r}}_i\cdot\underline{A}(\underline{r}_i,t)\right)$$

Führe Ladungs- und Stromdichte ein

$$\rho(\underline{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_i(t))$$

$$\underline{j}(\underline{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i\dot{\underline{r}}_i(t)\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_i(t))$$

$$\Rightarrow L = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m\dot{\underline{r}}_i^2 + \int d\underline{r}\left(-\rho(\underline{r},t)\phi(\underline{r},t) + \underline{j}(\underline{r},t)\underline{A}(\underline{r},t)\right)$$

Gesamtsystem Materie (Teilchen) und Felder.

Addiere zu L den Beitrag der Lagrangedichte des freien Strahlungsfeldes

$$\Rightarrow L_{total} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m\dot{\underline{r}}_i^2 + \int d\underline{r}\left[\frac{\varepsilon_0}{2}(\nabla\phi+\dot{\underline{A}})^2 - \frac{1}{2\mu_0}(\nabla\times\underline{A})^2 - \rho\phi + \underline{j}\cdot\underline{A}\right]$$