Wh: $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_D \psi(t)$

mit $\hat{H}_D = \Big(c\,\hat{\alpha}^i \underbrace{\frac{\hbar}{i}\partial_i}_{\hat{p}_i} + \hat{\beta}\, m_0 c^2 \Big)$ $\quad i = 1,2,3$

Formal:
DGL 1. Ordnung in der Zeit
und auch im Raum ($\hat{p}_i$ geht nur linear in $\hat{H}_D$ ein)!
$\Rightarrow$ Symmetrie

Forderung: Konsistenz mit der relativist. Energie-Impuls Beziehung $\Leftrightarrow$ ψ muß die KG-Gl. erfüllen

Wende Dirac-Gl. 2-mal an

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \hat{H}_D(\hat{H}_D \psi) \overset{!}{=} \underbrace{(\hat{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4)}_{E^2_{\text{relativistisch}}}\psi$$

Es muß gelten
$\Rightarrow$

① $\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j + \hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^i = 2\,\delta_{ij}\,\hat{1}$

② $\hat{\alpha}^i \hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}^i = 0$

③ $\hat{\beta}^2 = \hat{1}$

$\hat{\alpha}^i, \hat{\beta}$ sind ortsunabhängig

man hat also vier antikommutierende Matrizen!

Folgerungen:
aus ①: $\hat{\alpha}^i\hat{\alpha}^i + \hat{\alpha}^i\hat{\alpha}^i = 2\,\hat{1} \Leftrightarrow \hat{\alpha}_i^2 = \hat{1}$
aus ②: $\hat{\alpha}^i = -\hat{\beta}\hat{\alpha}^i\hat{\beta}^{-1}$

$$\Rightarrow \mathrm{Sp}\,\hat{\alpha}^i = -\mathrm{Sp}(\hat{\beta}\hat{\alpha}^i\hat{\beta}^{-1}) = -\mathrm{Sp}(\underbrace{\hat{\beta}^{-1}\hat{\beta}}_{\hat{1}}\hat{\alpha}^i)$$

$$= -\mathrm{Sp}(\hat{\alpha}^i)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Sp}\,\hat{\alpha}^i = 0 \;!!$$

d.h. die Summe der Eigenwerte von $\hat{\alpha}^i$ muß Null sein

andererseits $(\hat{\alpha}^i)^2 = \hat{1} \Rightarrow \hat{\alpha}_i$ muß die Eigenwerte ± 1 besitzen

Die Dimension N der Matrizen muß gerade sein
($\Leftrightarrow$ Anzahl der positiven und negativen Eigenwerte muß gleich sein)

man findet:

$N = 2$ geht nicht, da man dann nicht genügend unabhängige Matrizen zur Erfüllung (1) – (3) hat

$\Rightarrow$ niedrigste mögliche Dimension für $\hat{\alpha}^i, \hat{\beta}$

$N = 4 \Longrightarrow \underline{\psi}$ ist vierdimensionaler Vektor

$$\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad \text{„Spinor"}$$

a) Explizite Darstellung der Dirac-Koeffizienten $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}$

„Standarddarstellung"

$$\hat{\alpha}_i = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \hat{\sigma}^i \\ \hline \hat{\sigma}_i & 0 \end{array}\right), \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{1}} & 0 \\ 0 & -\underline{\underline{1}} \end{pmatrix}$$

Dabei sind die $\hat{\sigma}^i$ Pauli-Spin-Matrizen (2-dimensional)

$$\hat{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\left(\hat{\sigma}^i\right)^2 = \hat{1}$, Eigenwerte sind ± 1

$$\left[\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^j\right]_- = \hat{\sigma}^i\hat{\sigma}^j - \hat{\sigma}^j\hat{\sigma}^i = 2i\,\varepsilon_{ijk}\,\hat{\sigma}^k$$

Erinnerung: Drehimpulse (in der nicht-relativist. QM)

$$\hat{l}^2 \,|l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)\,|l,m\rangle$$
$$\hat{l}_z \,|l,m\rangle = \hbar m\,|l,m\rangle \qquad [\hat{l}^2, \hat{l}_z] = 0$$

$$\hat{l}_x = \frac{1}{2}(\hat{l}_+ + \hat{l}_-), \quad \hat{l}_y = \frac{1}{2i}(\hat{l}_+ - \hat{l}_-)$$

Leiteroperatoren: $\hat{l}_+ \,|l,m\rangle = \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,|l,m+1\rangle$

$$\hat{l}_- \,|l,m\rangle = \hbar\sqrt{(l+m)\,(l-m+1)}\,|l,m-1\rangle$$

Speziell $l = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

$$\hat{l}^2 \,|\tfrac{1}{2}, m\rangle = \tfrac{3}{4}\hbar^2 \,|\tfrac{1}{2}, m\rangle$$

$$\hat{l}_z \,|\tfrac{1}{2}, m\rangle = \frac{\hbar}{2} \,|\tfrac{1}{2}, m\rangle$$

$$\vdots$$

$\Longrightarrow$ Matrixdarstellungen von $\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$ für $l = \frac{1}{2}$

$$\rightarrow \hat{l}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}^1$$

$$\hat{l}_y = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}^2$$

$$\hat{l}_z = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}^3$$

Ende der 'Erinnerung'

Zurück zum Dirac-Operator

$$\hat{H}_D = c\,\hat{\underline{\alpha}} \cdot \hat{\underline{p}} + \hat{\beta}\, m_0 c^2 \qquad \hat{\underline{\alpha}} = (\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\alpha}^3)$$

Einsetzen der Standarddarstellung von $\hat{\underline{\alpha}}$ und $\hat{\beta}$

$$\hat{H}_D = \left(\begin{array}{cc|cc} m_0 c^2 & 0 & cp_z & c(p_x - ip_y) \\ 0 & m_0 c^2 & c(p_x + ip_y) & -cp_z \\ \hline cp_z & c(p_x - ip_y) & -m_0 c^2 & 0 \\ c(p_x + ip_y) & -cp_z & 0 & -m_0 c^2 \end{array}\right)$$

4x4 Matrix

b) Dirac-Gl. in kovarianter Form

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\psi} = \hat{H}_D \underline{\psi}(t) \quad (*) \qquad (\underline{\psi} \text{ Spinor})$$

multipliziere $(*)$ von links mit $\frac{1}{c}\hat{\beta}$

$$\rightarrow \left(i\hbar \frac{1}{c} \hat{\beta} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c} \hat{\beta} (c \underline{\hat{\alpha}} \cdot \underline{\hat{p}} + \hat{\beta} m_0 c^2) \right) \underline{\psi} = 0$$

mit $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$ und $\underline{\hat{p}} = \frac{\hbar}{i} \nabla = -i\hbar \nabla$

$$\left(+i\hbar \hat{\beta} \partial_0 + i\hbar \hat{\beta} \hat{\alpha}^i \partial_i - \hat{\beta}^2 m_0 c \right) \underline{\psi} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-i\hbar \left(\hat{\beta} \partial_0 + \hat{\beta} \hat{\alpha}^i \partial_i \right) + m_0 c \hat{1} \right) \underline{\psi} = 0 \quad (**)$$

Definiere nun die neuen Dirac-Matrizen

$$\hat{\gamma}^0 = \hat{\beta} \qquad \text{jedes } \hat{\gamma}^\mu \text{ ist } 4 \times 4 \text{ Matrix}$$

$$\hat{\gamma}^i = \hat{\beta} \hat{\alpha}^i$$

aus $(**)$ $\left(-i\hbar \left(\hat{\gamma}^0 \partial_0 + \hat{\gamma}^i \partial_i \right) + m_0 c \hat{1} \right) \underline{\psi} = 0$

$$\left(-i \hat{\gamma}^\mu \partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar} \hat{1} \right) \underline{\psi} = 0$$

$\mu = 0, 1, 2, 3$

Verwende nun die verkürzte Schreibweise

$\not{\partial} = \hat{\gamma}^\mu \partial_\mu$ (Skalarprodukt aus Vektor $\hat{\gamma}$ und dem kovarianten Ableitungsvektor)

$$\Rightarrow \boxed{\left(-i\not{\partial} + \frac{m_0 c}{\hbar} \hat{1} \right) \underline{\psi} = 0}$$

Kovariante Form der Dirac-Gl.

c) Kontinuitätsgleichung und Wahrscheinlichkeitsinterpretation

(Frage: Erhalten wir eine "vernünftige" (positive) Dichte?)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\psi} = \hat{H}_D \underline{\psi} \quad \text{mit} \quad \hat{H}_D = c \hat{\alpha}^i \hat{p}_i + \hat{\beta} m_0 c^2$$

multipliziere von links mit dem adjungierten Spinor

$$\underline{\psi}^+ = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$$

$$① \quad i\hbar \underline{\psi}^+ \frac{\partial}{\partial t} \underline{\psi} = c\, \underline{\psi}^+ \hat{\alpha}^i \hat{p}_i \underline{\psi} + m_0 c^2\, \underline{\psi}^+ \hat{\beta} \underline{\psi}$$

umgekehrt: nehme adjungierte Dirac-Gl. und multipliziere von rechts mit $\underline{\psi}$

adjungierte Dirac-Gl.

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\underline{\Psi}^{+}=(\hat{p}_i\underline{\Psi})^{+}\hat{\alpha}_i^{+}+\underbrace{(\hat{\beta}\underline{\Psi})^{+}}_{\underline{\Psi}^{+}\hat{\beta}^{+}}m_0c^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{benutze}\\ (\hat{A}\hat{B})^{+}=\hat{B}^{+}\hat{A}^{+}\end{array}}$$

$$\Rightarrow (2)\quad -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}\underline{\Psi}^{+}\right)\underline{\Psi}=c(\hat{p}_i\underline{\Psi})^{+}(\hat{\alpha}^{i})^{+}\underline{\Psi}+\underline{\Psi}^{+}\hat{\beta}\underline{\Psi}\, m_0c^2$$

bilde (1) + (2)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\underline{\Psi}^{+}\underline{\Psi})=c\Big(\underline{\Psi}^{+}\hat{\alpha}^{i}\hat{p}_i\underline{\Psi}-(\hat{p}_i\underline{\Psi})^{+}(\hat{\alpha}^{i})^{+}\underline{\Psi}\Big)+m_0c^2\left(\underline{\Psi}^{+}\hat{\beta}\underline{\Psi}-\underline{\Psi}^{+}\hat{\beta}^{+}\underline{\Psi}\right)$$

ersetze: $\hat{p}_i\to\frac{\hbar}{i}\partial_i$ und benutze, dass

$$(\hat{p}_i\underline{\Psi})^{+}=-\frac{\hbar}{i}\partial_i\underline{\Psi}^{+}$$

$\hat{\alpha}_i$ ortsunabhängig

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\underline{\Psi}^{+}\underline{\Psi})=c\frac{\hbar}{i}\Big(\underline{\Psi}^{+}\hat{\alpha}^{i}\partial_i\underline{\Psi}+\partial_i\underline{\Psi}^{+}(\hat{\alpha}^{i})^{+}\underline{\Psi}\Big)+m_0c^2\left(\underline{\Psi}^{+}\hat{\beta}\underline{\Psi}-\underline{\Psi}^{+}\hat{\beta}^{+}\underline{\Psi}\right)$$

Benutze nun noch, daß $\hat{\alpha}_i$ und $\hat{\beta}$ hermitesch

(s. Standarddarstellung)

$$\hat{\beta}^+ = \beta$$
$$\hat{\alpha}^{i+} = \hat{\alpha}^i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\underline{\psi}^+\underline{\psi}) = -c\,\partial_i(\underline{\psi}^+\hat{\alpha}^i\underline{\psi})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\underline{\psi}^+\underline{\psi}) + \partial_i(\underline{\psi}^+\hat{\alpha}^i\underline{\psi}) = 0$$

Das hat genau die Form einer Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

mit $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$

Viererstromdichte: $j^0 = c\varrho$ mit $\varrho = \underline{\psi}^+\underline{\psi}$

$j^i = c\,\underline{\psi}^+\hat{\alpha}^i\underline{\psi}$

beachte

$$\underline{\psi}^+\underline{\psi} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$$
$$\geq 0 \quad \text{positiv!}$$

$\Rightarrow$ Interpretation als <u>Wahrscheinlichkeitsdichte</u>!!

d) Lösungen der Dirac-Gl. für das freie Teilchen

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\underline{\Psi} = \hat{H}_D \underline{\Psi} \iff \left(-i\not{\partial} + \frac{m_0 c}{\hbar}\hat{1}\right)\underline{\Psi} = 0$$

es gilt: $[\hat{H}_D, \hat{\underline{p}}] = 0$

$\Rightarrow$ Eigenzustände von $\hat{\underline{p}}$ sind auch EZ von $\hat{H}_D$

$A e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}$ (Ortsdarstellung)

$$\left(\text{denn } \hat{\underline{p}} A e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}} = \frac{\hbar}{i}\nabla A e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}} = \underline{p} A e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}\right.$$

beachte: A kann auch Funktion von $\underline{p}$ (oder E) sein, da $\hat{\underline{p}}$ nur auf $\underline{r}$ wirkt!

$\Rightarrow$ Ansatz für Spinor:

$$\underline{\Psi}(\underline{r},t) = \underline{\Psi}^0(E,\underline{p})\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\, e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}$$

Einsetzen in kovariante Dirac-Gl.

$$\left(-i\underbrace{\hat{\gamma}^\mu \partial_\mu}_{\hat{\gamma}^0 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \hat{\gamma}^i \partial_i} + \frac{m_0 c}{\hbar}\hat{1}\right)\underline{\Psi} = 0 \quad \text{mit} \quad \hat{\gamma}^0 = \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ -\hat{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix}$$

beachte:

$$\partial_0 \underline{\Psi}(\underline{r},t) = \frac{1}{c}\left(-\frac{i}{\hbar}\right) E\, \underline{\Psi}(\underline{r},t)$$

$$\partial_i \underline{\Psi}(\underline{r},t) = \frac{i}{\hbar}\, p_i\, \underline{\Psi}(\underline{r},t)$$

Impulskomponente, kein Operator mehr

setze

$$\underline{\Psi} = \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

man findet:

$$-\frac{1}{c\hbar} E \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ -\underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\underline{\sigma}} \cdot p \\ -\hat{\underline{\sigma}} \cdot p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \frac{m_0 c}{\hbar} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{mit } \hat{\underline{\sigma}} \cdot p = \hat{\sigma}^1 p_1 + \hat{\sigma}^2 p_2 + \hat{\sigma}^3 p_3$$

2x2 Matrix

Ausschreiben des linearen Gleichungssystems

$$① \quad E \underline{\varphi}_1 = c \hat{\underline{\sigma}} \cdot p \, \underline{\varphi}_2 + m_0 c^2 \underline{\varphi}_1$$

$$② \quad -E \underline{\varphi}_2 = -c \hat{\underline{\sigma}} \cdot p \, \underline{\varphi}_1 + m_0 c^2 \underline{\varphi}_2$$

Dieses Gleichungssystem hat nur eine Lösung, falls die Koeffizientendeterminante verschwindet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E - m_0 c^2 \underline{1} & -c \hat{\underline{\sigma}} \cdot p \\ -c \hat{\underline{\sigma}} \cdot p & E + m_0 c^2 \underline{1} \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (E - m_0 c^2)(E + m_0 c^2) - c^2 (\hat{\underline{\sigma}} \cdot \underline{p})(\hat{\underline{\sigma}} \cdot \underline{p}) = 0$$

bemerke noch folgende Relation (hier ohne Beweis)

$$(\hat{\underline{\sigma}} \cdot \underline{A})(\hat{\underline{\sigma}} \cdot \underline{B}) = \underline{A} \cdot \underline{B}\ \hat{\underline{\underline{1}}} + i \hat{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{A} \times \underline{B})$$

$$(E - m_0 c^2)(E + m_0 c^2) - c^2 p^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E^2 - m_0^2 c^4 - c^2 p^2 = 0}$$