

Wkt: $\hat{H} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_D \psi(t)$

mit $\hat{H}_D = \left(c \underbrace{\vec{\alpha}^i \hat{p}_i}_{\substack{\text{mit } \hat{p}_i \\ i=1,2,3}} + \hat{\beta} m_0 c^2 \right)$

Famals:

DGL 1. Ordnung in der Zeit und auch im Raum (\hat{p}_i geht hier linear in \hat{H}_D ein)!
 \rightarrow Symmetrie

Forderung: Kompatibilität mit der relativist. Energie-Impuls-Beziehung $\Leftrightarrow \psi$ muß die KG-Gl. erfüllen

Wende Dirac-Gl. 2-mal an

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = \hat{H}_D (\hat{H}_D \psi) = \underbrace{\left(\hbar^2 c^2 + m_0^2 c^4 \right)}_{\text{Energie-Impuls}} \psi$$

Es muß gelten

\Rightarrow ① $\vec{\alpha}^i \vec{\alpha}^j + \vec{\alpha}^j \vec{\alpha}^i = 2 \delta_{ij} \hat{1}$

② $\vec{\alpha}^i \hat{\beta} + \hat{\beta} \vec{\alpha}^i = 0$

③ $\hat{\beta}^2 = \hat{1}$

man hat also hier antikommutierende Matrizen!

$\vec{\alpha}^i, \hat{\beta}$ sind
 ortsunabhängig

Folgerungen:

aus ①: $\vec{\alpha}^i \vec{\alpha}^i + \vec{\alpha}^i \vec{\alpha}^i = 2 \hat{1} \Leftrightarrow \vec{\alpha}^i{}^2 = \hat{1}$

aus ②: $\vec{\alpha}^i = -\hat{\beta} \vec{\alpha}^i \hat{\beta}^{-1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Sp } \hat{\alpha}^i &= -\text{Sp}(\hat{\beta} \hat{\alpha}^i \hat{\beta}^{-1}) = -\text{Sp}(\underbrace{\hat{\beta}^{-1} \hat{\beta}}_{\hat{1}} \hat{\alpha}^i) \\ &= -\text{Sp}(\hat{\alpha}^i) \\ \Rightarrow \text{Sp } \hat{\alpha}^i &= 0!! \end{aligned}$$

d.h. die Summe der Eigenwerte von $\hat{\alpha}^i$ muss Null sein

andererseits $(\hat{\alpha}^i)^2 = \hat{1} \Rightarrow \hat{\alpha}^i$ muss drei Eigenwerte ± 1 besitzen

Die Dimension N der Matrizen muss gerade sein
 (\Leftrightarrow Anzahl der positiven und negativen Eigenwerte muss gleich sein)

man findet:

$N=2$ geht nicht, da man dann nicht genügend unabhängige Matrizen zur Erfüllung ①-③ hat

\Rightarrow niedrigste mögliche Dimension: für $\hat{\alpha}^i, \hat{\beta}$

$N=4 \Rightarrow \underline{4}$ ist vierdimensionaler Vektor

$$\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad \text{"Spinor"}$$

a) Explizite Darstellung der Dirac-Koeffizienten
 "Standarddarstellung"

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ \hat{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dabei sind die $\hat{\sigma}^i$ Pauli-Spin-Matrizen (2-dimensional)

$$\hat{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $(\hat{\sigma}^i)^2 = \hat{1}$, Eigenwerte sind ± 1

$$[\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^j] = \hat{\sigma}^i \hat{\sigma}^j - \hat{\sigma}^j \hat{\sigma}^i = 2i \epsilon_{ijk} \hat{\sigma}^k$$

Erinnerung: Drehimpulse (in der nicht-relativist. QM)

$$\hat{L}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle$$

$$\hat{L}_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle$$

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = 0$$

$$\hat{L}_x = \frac{1}{2} (\hat{L}_+ + \hat{L}_-), \quad \hat{L}_y = \frac{1}{2i} (\hat{L}_+ - \hat{L}_-)$$

$$\text{Leiteroperatoren: } \hat{L}_+ |l, m\rangle = \hbar \sqrt{(l-m)(l+m+1)} |l, m+1\rangle$$

$$\hat{L}_- |l, m\rangle = \hbar \sqrt{(l+m)(l-m+1)} |l, m-1\rangle$$

Speziell $l = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

$$\hat{L}^2 \left| \frac{1}{2}, m \right\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \left| \frac{1}{2}, m \right\rangle$$

$$\hat{L}_z \left| \frac{1}{2}, m \right\rangle = \frac{\hbar}{2} \left| \frac{1}{2}, m \right\rangle$$

⋮

⇒ Matrixdarstellungen von $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ für $l = \frac{1}{2}$

$$\rightarrow \hat{L}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}^1$$

$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}^2$$

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}^3$$

Ende der 'Erinnerung'

Zurück zum Dirac-Operator

$$\hat{H}_D = c \underline{\hat{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta} m_0 c^2 \quad \underline{\hat{\alpha}} = (\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\alpha}^3)$$

Einsetzen der Standarddarstellung von $\underline{\hat{\alpha}}$ und $\hat{\beta}$

$$\hat{H}_D = \begin{pmatrix} m_0 c^2 & 0 & c p_z & c(p_x - i p_y) \\ 0 & m_0 c^2 & c(p_x + i p_y) & -c p_z \\ \hline c p_z & c(p_x - i p_y) & -m_0 c^2 & 0 \\ c(p_x + i p_y) & -c p_z & 0 & -m_0 c^2 \end{pmatrix}$$

4x4 Matrix

b) Dirac-Gl. in kovariante Form

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H}_D \psi(t) \quad (*) \quad (\psi \text{ Spine})$$

multipliziere (*) von links mit $\frac{1}{c} \hat{\beta}$

$$\rightarrow \left(i\hbar \frac{1}{c} \hat{\beta} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c} \hat{\beta} (c \hat{\alpha} \cdot \hat{p} + \hat{\beta} m_0 c^2) \right) \psi = 0$$

mit $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$ und $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla = -i\hbar \nabla$

$$\rightarrow \left(i\hbar \hat{\beta} \partial_0 + i\hbar \hat{\beta} \hat{\alpha}^i \partial_i - \hat{\beta}^2 m_0 c \right) \psi = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-i\hbar (\hat{\beta} \partial_0 + \hat{\beta} \hat{\alpha}^i \partial_i) + m_0 c \hat{1} \right) \psi = 0 \quad (**)$$

Definieren nun die neuen Dirac-Matrizen

$$\hat{\gamma}^0 = \hat{\beta} \quad \text{jedes } \hat{\gamma}^\mu \text{ ist } 4 \times 4 \text{ Matrix}$$

$$\hat{\gamma}^i = \hat{\beta} \hat{\alpha}^i$$

$$\text{aus } (**) \left(-i\hbar (\hat{\gamma}^0 \partial_0 + \hat{\gamma}^i \partial_i) + m_0 c \hat{1} \right) \psi = 0$$

$$\left(-i \hat{\gamma}^\mu \partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar} \hat{1} \right) \psi = 0$$

Verwende nun die verkürzte Schreibweise $\mu=0,1,2,3$
 $\not{D} = \hat{\gamma}^\mu \partial_\mu$ (Skalarprodukt aus Vektor $\hat{\gamma}$
 und dem kovarianten Ableitungsvektor)

$$\Rightarrow \left[(-i\not{D} + \frac{m_0 c}{\hbar} \hat{1}) \underline{\psi} = 0 \right]$$

Kovariante Form der Dirac-Gl.

c) Kontinuitätsgleichung und Wahrscheinlichkeitsinterpretation:

(Frage: Erhaltet wir eine "vernünftige" Dichte?)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\psi} = \hat{H}_D \underline{\psi} \quad \text{mit} \quad \hat{H}_D = c \hat{\alpha}^i \hat{p}_i + \hat{\beta} m_0 c^2$$

Multipliziere von links mit dem adjungierten Spinor

$$\underline{\psi}^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$$

$$\textcircled{1} \quad i\hbar \underline{\psi}^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \underline{\psi} = c \underline{\psi}^\dagger \hat{\alpha}^i \hat{p}_i \underline{\psi} + m_0 c^2 \underline{\psi}^\dagger \hat{\beta} \underline{\psi}$$

Umgekehrt: nehme adjungierte Dirac-Gl. und multipliziere von rechts mit $\underline{\psi}$

adjungierte Dirac-Gl.

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi^\dagger = (\hat{p}_i \psi)^\dagger \alpha_i^\dagger + \underbrace{(\hat{\beta} \psi)^\dagger}_{\psi^\dagger \hat{\beta}^\dagger} m_0 c^2$$

$$\Rightarrow \textcircled{2} -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi^\dagger \right) \psi = c \underbrace{(\hat{p}_i \psi)^\dagger (\alpha_i^\dagger)^\dagger}_{\text{benutze } \begin{matrix} \text{benutze} \\ (A^\dagger B)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \end{matrix}} \psi + \psi^\dagger \hat{\beta} \psi \uparrow m_0 c^2$$

bilde ① + ②

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (\psi^\dagger \psi) = c \left(\psi^\dagger \alpha_i^\dagger \hat{p}_i \psi - (\hat{p}_i \psi)^\dagger (\alpha_i)^\dagger \psi \right) + m_0 c^2 (\psi^\dagger \hat{\beta} \psi - \psi^\dagger \hat{\beta}^\dagger \psi)$$

ersetze = $\hat{p}_i \rightarrow \frac{\hbar}{i} \partial_i$ und benutze, dass α_i antisymmetrisch

$$(\hat{p}_i \psi)^\dagger = -\frac{\hbar}{i} \partial_i \psi^\dagger$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (\psi^\dagger \psi) = c \frac{\hbar}{i} \left(\psi^\dagger \alpha_i^\dagger \partial_i \psi + \partial_i \psi^\dagger (\alpha_i)^\dagger \psi \right) + m_0 c^2 (\psi^\dagger \hat{\beta} \psi - \psi^\dagger \hat{\beta}^\dagger \psi)$$

Benutze nun noch, dass \hat{a}_i und \hat{b} hermitisch
(s. Standarddarstellung)

$$\begin{aligned} \hat{b}^\dagger &= \hat{b} \\ \hat{a}_i^\dagger &= \hat{a}_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = -c \partial_i (\psi^\dagger \hat{a}^i \psi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) + \partial_i (\psi^\dagger \hat{a}^i \psi) = 0$$

Das hat genau die Form einer Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

$$\text{mit } \partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Vierstromelemente: } j^0 &= c \rho \quad \text{mit } \rho = \psi^\dagger \psi \\ j^i &= c \psi^\dagger \hat{a}^i \psi \end{aligned}$$

beachte

$$\psi^\dagger \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$$

$$\geq 0 \quad \text{positiv!}$$

\Rightarrow Interpretation als Wahrscheinlichkeitsdichte !

d) Lösungen der Dirac-Gl. für das freie Teilchen

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H}_D \psi \Leftrightarrow \left(-i\partial_t + \frac{m_0 c}{\hbar} \gamma^0 \right) \psi = 0$$

es gilt: $[\hat{H}_D, \hat{p}] = 0$

\Rightarrow Eigenzustände von \hat{p} sind auch EZ von \hat{H}_D

$\hookrightarrow A e^{i\frac{p \cdot x}{\hbar}}$ (Ansatz)

(denn $\hat{p} A e^{i\frac{p \cdot x}{\hbar}} = \frac{\hbar}{i} \nabla A e^{i\frac{p \cdot x}{\hbar}} = p A e^{i\frac{p \cdot x}{\hbar}}$)

beachte: A kann ^{auch} Funktion von p (oder E) sein, da \hat{p} nur auf x wirkt!

\Rightarrow Ansatz für Spinor:

$$\psi(\underline{r}, t) = \psi^0(E, p) e^{-i\frac{Et}{\hbar}} e^{i\frac{p \cdot x}{\hbar}}$$

Einsetzen in kovariante Dirac-Gl.

$$\left(-i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} + \frac{m_0 c}{\hbar} \gamma^0 \right) \psi = 0 \quad \text{mit}$$

$$\gamma^0 = \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^i = \vec{\beta} \vec{\alpha}^i = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}^i \\ -\vec{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^i \partial_i$$

beachte:

$$\partial_0 \psi(\underline{r}, t) = \frac{1}{c} (-i\frac{E}{\hbar}) \psi(\underline{r}, t)$$

$$\partial_i \psi(\underline{r}, t) = i\frac{p_i}{\hbar} \psi(\underline{r}, t)$$

Impuls Komponente, kein Operator mehr

Setze

$$\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}$$

man findet:

$$-\frac{1}{c\hbar} E \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ -\underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\underline{\sigma}} \cdot \underline{p} \\ -\hat{\underline{\sigma}} \cdot \underline{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \frac{m_0 c}{\hbar} \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ -\underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{mit } \hat{\underline{\sigma}} \cdot \underline{p} = \hat{\sigma}^1 p_1 + \hat{\sigma}^2 p_2 + \hat{\sigma}^3 p_3$$

2×2 Matrix

Ausschreiben des linearen Gleichungssystems

$$\textcircled{1} E \underline{\varphi}_1 = c \hat{\underline{\sigma}} \cdot \underline{p} \underline{\varphi}_2 + m_0 c^2 \underline{\varphi}_1$$

$$\textcircled{2} -E \underline{\varphi}_2 = -c \hat{\underline{\sigma}} \cdot \underline{p} \underline{\varphi}_1 + m_0 c^2 \underline{\varphi}_2$$

Dieses Gleichungssystem hat nur eine Lösung, falls die Koeffizienten determinante verschwindet

$$\begin{pmatrix} E - m_0 c^2 \hat{1} & -c \hat{\underline{\sigma}} \cdot \underline{p} \\ -c \hat{\underline{\sigma}} \cdot \underline{p} & E + m_0 c^2 \hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (E - m_0 c^2)(E + m_0 c^2) - c^2 (\hat{\sigma} \cdot \underline{p})(\hat{\sigma} \cdot \underline{p}) = 0$$

benutze nach folgende Relativität (hier ohne Beweis)

$$(\hat{\sigma} \cdot \underline{A})(\hat{\sigma} \cdot \underline{B}) = \underline{A} \cdot \underline{B} \hat{1} + i \hat{\sigma} \cdot (\underline{A} \times \underline{B})$$

$$(E - m_0 c^2)(E + m_0 c^2) - c^2 p^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E^2 - m_0^2 c^4 - c^2 p^2 = 0}$$