g) Ankopplung an das elektromagnetische Feld

Erinnerung

i) Klass. Elektrodynamik

magnetische Induktion

$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$ ← Vektorpotential $\underline{A}(\underline{r},t)$

$\underline{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$

Elektr. Feld — skalares Potential $\phi(\underline{r},t)$

physikalische Begriffe

$\underline{E}$ und $\underline{B}$ ändern sich nicht unter der Eichtransformation

$$\underline{A} \to \underline{A} + \nabla \varphi$$

$$\phi \to \phi - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

mit φ beliebige skalare Funktion von $\underline{r},t$ (muß diff.bar sein)

$\Rightarrow \underline{F}^{\text{Lorentz}} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$ Lorentzkraft invariant unter Eichtransf.

ii) Ankopplung in der klassischen Mechanik

$$H = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow H = \frac{(\underline{p} - \frac{q}{c}\underline{A})^2}{2m} + q\phi$$

Hamiltonfkt.

geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

iii) Ankopplung in der nicht-relativistischen Quantenmechanik

Korrespondenzprinzip. $H \to \hat{H}$, $\underline{A} \to \underline{A}(\hat{\underline{r}},t)$, $\phi \to \phi(\hat{\underline{r}},t)$

$\Rightarrow$ Schrödinger-Gl.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{(\hat{p} - \frac{q}{c}\underline{A})^2}{2m} + q\,\phi(\underline{r},t) \right] \psi$$

oder

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi = \frac{1}{2m}\left(\hat{p} - \frac{q}{c}\underline{A}(\underline{r},t)\right)^2 \psi$$

man sieht also:
Im Vergleich zur Schrödinger Gl. des Teilchens ohne elektromagnetisches Feld wurde ersetzt

$$\hat{p} \rightarrow \hat{p} - \frac{q}{c}\underline{A}(\underline{r},t) \underset{\text{Ortsdarstellung}}{\Longrightarrow} \frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\underline{A}(\underline{r},t)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\,\phi(\underline{r},t)$$

(Ortsdarstellung

Geh nun analog vor:

$\Rightarrow$ <u>KG-Gleichung</u>

$$\frac{1}{c^2}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)^2\psi = \left[\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\underline{A}\right)^2 + m_0^2 c^2\right]\psi \quad (*)$$

---

vorher: $\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi = E^2\psi$ mit $E = m_0^2c^4 + \hat{p}^2c^2$

Umschreiben in Vierernotation:

ohne elektromagnetisches Feld hatten wir

$$\Big(\underbrace{\partial^\mu \partial_\mu}_{} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\Big)\psi = 0$$

d'Alembertoperator

$$\Box = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

$$\partial^\mu = \Big(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\Big)$$
$$\partial_\mu = \Big(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\Big)$$

mit elektromagnetischem Feld:

$$\partial^\mu \to \partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c} A^\mu$$

„minimale Kopplung"

$$\text{wobei } A^\mu = (\phi, \underline{A})$$
$$A_\mu = (\phi, -\underline{A})$$

check:

$$\Big(\Big(\partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c}A^\mu\Big)\Big(\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c}A_\mu\Big) + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\Big)\psi = 0$$

$$\Leftrightarrow \Big(\Big(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar c}\phi\Big)^2 - \Big(\underline{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c}\underline{A}\Big)^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\Big)\psi = 0$$

$$\Leftrightarrow \Big(\Big(\frac{i}{\hbar c}\Big(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} + q\phi\Big)\Big)^2 - \Big(\frac{i}{\hbar}\Big(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\underline{A}\Big)\Big)^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\Big)\psi = 0 \quad \Big| \cdot \Big(\frac{\hbar}{i}\Big)^2$$

$$\Leftrightarrow \Big(\frac{1}{c^2}\Big(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + q\phi\Big)^2 - \Big(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\underline{A}\Big)^2 - m_0^2 c^2\Big)\psi = 0 \qquad \text{o.k.!!}$$

Beispiel:

KG-Gleichung im Coulombfeld (→ Atom!)

⇒ Übung

I.2. Dirac-Gleichung

Warum noch eine weitere Gleichung für den relativistische Fall?

- KG-Gl. ist Diff.gl. <u>zweiter Ordnung</u> in Zeit (und Raum)
  → man benötigt Anfangsbedingungen für $\psi(t=0)$ und $\dot{\psi}(t=0)$

  Das ist formal anders als in der Schrödingergl.
  <u>und</u> führt dazu, daß die Dichte negativ werden kann!!

- KG-Gl. enthält kein Spin (formal: $s=0$)

Suche nun eine Diff.gl. <u>erster Ordnung</u> in der Zeit, die außerdem auf Teilchen mit $s=\frac{1}{2}$ anwendbar ist!

Fordere außerdem "<u>Lorentz-Invarianz</u>"
(d.h. die neue Gl. soll wieder in allen Inertialsystemen dieselbe Struktur haben)

→ Die Gl. muß auch erster Ordnung in der Zeit sein.
(damit formale Symmetrie zw. Ort und Zeit gewährleistet ist)

Schliesslich: Die Gl. muß die <u>relativistische Energie-Impuls-Beziehung</u> reproduzieren

Ansatz (für freies Teilchen)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_D \psi(t)$$

Dirac-Operator

(*)

$$\text{mit } \hat{H}_D = \left[c\hat{\alpha}^i \underbrace{\frac{\hbar}{i}\partial_i}_{\hat{=}\hat{p}_i} + \hat{\beta} m_0 c^2 \right] \qquad i = x,y,z$$

Einstein'sche Summenkonvention

Wie kommt man darauf ??

(Idee von Dirac: Linearisiere die relativist. Energie-Impuls-Bez.)

$$E^2 - c^2 p^2 - m_0^2 c^4 = 0$$

mit dem Ansatz

$$\left(E - c\sum_i \hat{\alpha}^i \hat{p}_i - \hat{\beta} m_0 c^2\right)\left(E + c\sum_j \hat{\alpha}^j \hat{p}_j + \hat{\beta} m_0 c^2\right) = 0$$

führt bei Ausmultiplizieren auf die richtige E-p-Beziehung, falls: (Nolting)

$$\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j + \hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^i = 2\delta_{ij} \hat{1}$$
$$\hat{\alpha}^i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^i = 0$$
$$\hat{\beta}^2 = \hat{1}$$

außerdem: $\hat{\alpha}^i, \hat{\beta}$ müssen mit $\hat{p}_i$ kommutieren
$\Rightarrow$ müssen ortsunabhängig sein !!

Betrachte nun den linken Faktor (falls dieser Null ist, ist die Gl. bereits erfüllt) und benutze Korrespondenzprinzip:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad p = \frac{\hbar}{i}\nabla$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - c\alpha_i \frac{\hbar}{i} \partial_i \psi - \beta m_0 c^2 \psi = 0 \Rightarrow (*)$$

Alternative (kompakte) Schreibweise für Dirac-Operator

$$\hat{H}_D = c\,\hat{\underline{\alpha}}\cdot\hat{\underline{p}} + \hat{\beta}\, m_0 c^2 \qquad \text{mit } \hat{\underline{\alpha}} = (\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\alpha}^3)$$

↑ 3-dim. Impulsoperator

Frage nun: Was sind die Koeffizienten α^i und $\hat{\beta}$?

Problem: die α^i können nicht einfach Zahlen sein, sonst hätte man keine Forminvarianz unter Drehung!

(Bsp

$x' = y \Rightarrow \partial_y = \partial_{x'}$

$y' = -x \Rightarrow \partial_x = -\partial_{y'}$

Vorzeichenwechsel!)

Daher nimmt man an (Dirac):

Die $\hat{\alpha}_i$ und $\hat{\beta}$ sind hermitesche $N\times N$ Matrizen.
Damit ist auch $\hat{H}_D$ hermitesch und es kann eine positive Wahrsch.dichte existieren

Damit folgt:

ψ ist N-dim. Vektor, $\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$ „Spinor"

Erinnerung

Die neue Diffgl. soll mit der relativist. E-p-Beziehung konsistent sein.

→ Die Komponenten von ψ müssen die Klein-Gordon-Gl. erfüllen. Denn dann wissen wir, daß ebene Wellen die Beziehung $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$ erfüllen!!

Wende dazu die Dirac-Gl. zweimal an.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi\right) = \hat{H}_D(\hat{H}_D \psi)$$

$$\Rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \left(c\frac{\hbar}{i}\hat{\alpha}^i\partial_i + \hat{\beta} m_0c^2\right)\left(c\frac{\hbar}{i}\hat{\alpha}^j\partial_j + \hat{\beta} m_0c^2\right)\psi$$

$$= -\hbar^2c^2\hat{\alpha}^i\partial_i\hat{\alpha}^j\partial_j\,\psi$$

$$+ \frac{\hbar m_0c^3}{i}\left(\hat{\alpha}^i\partial_i\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}^j\partial_j\right)\psi$$

$$+ \hat{\beta}^2 m_0^2c^4\psi$$

da $\hat{\alpha}^i$ ortsunabhängig

erster Term: symmetrisiere $\Rightarrow$ $\hat{\alpha}^i\partial_i\hat{\alpha}^j\partial_j = \hat{\alpha}^i\hat{\alpha}^j\partial_i\partial_j$

es gilt die Einstein'sche Summenkonvention!! $= \frac{1}{2}\left(\hat{\alpha}^i\hat{\alpha}^j + \hat{\alpha}^j\hat{\alpha}^i\right)\partial_i\partial_j$

zweiter Term: $\sum_{i=1}^{3}\hat{\alpha}^i\partial_i\hat{\beta} + \sum_{j=1}^{3}\hat{\beta}\hat{\alpha}^j\partial_j = \sum_i\left(\hat{\alpha}^i\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}^i\right)\partial_i$

da $\hat{\beta}$ ortsunabhängig

$$\Rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{-\hbar^2 c^2}{2} \left(\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j + \hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^i \right) \partial_i \partial_j \psi$$

$$+ \frac{\hbar m_0 c^3}{i} \left(\hat{\alpha}^i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^i \right) \partial_i \psi$$

$$+ \hat{\beta}^2 m_0^2 c^4 \psi$$

$$\stackrel{!}{=} \left(\hat{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4 \right) \psi$$

Klein-Gordon

$$= \left(-\hbar^2 c^2 \partial_i^2 + m_0^2 c^4 \right) \psi$$

Folgerung: ① $\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j + \hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^i = 2 \delta_{ij} \hat{1}$

② $\hat{\alpha}^i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^i = 0$

③ $\hat{\beta}^2 = \hat{1}$

beachte: Aus ① folgt auch
$\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^i + \hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^i = 2 \hat{1} \Rightarrow \hat{\alpha}_i^2 = \hat{1}$

Frage: <u>Dimension</u> der Matrizen ??