Beginn 8.30 Quantenmechanik II

Moses-Anmeldung!

Beginn der Übungen: 2. VL-Woche

VL: Di $8^{30} - 10^{00}$ EW 205
Do $8^{30} - 10^{00}$

Ausgabe Ü-Zettel: Do Beginn VL
Abgabe Ü-Zettel: 2 Wochen später
Do Beginn VL

Abgabe in 3-Gruppen

Scheinkriterien:

50 % der Punkte Ü-Zettel

Aktive Teilnahme: Jeder muß einmal vorrechnen

Schwerpunkte der Vorlesung

- **Relativistische Quantentheorie**

  bisher: QM für nichtrelativistische Systeme

  jetzt: relativistische Formulierung

  Klein-Gordon-Gleichung

  Dirac-Gleichung

  Spin, Feinstruktur des H-Atoms

- **Vielteilchen-Quantenmechanik**

  - Systeme identischer Teilchen, Pauli-Prinzip
    (evtl. ansatzweise schon in der Statist. Physik, jetzt aus der Sicht der QM)

  - 2. Quantisierung (Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren)

  - Näherungsmethode für Vielteilchen-Systeme
    (Hartree-Fock-Gl., Austauschwechselwirkung)

- **Streutheorie**:

  Streuung von Teilchen an Teilchen oder Materie

Literatur

Nolting: Quantenmechanik II, Vielteilchentheorie

Schwabl: Höhere Quantenmechanik

U. Scherz: Quantenmechanik

0. Wiederholung von Elementen der Quantenmechanik

a) Beschreibung des Zustands eines Systems

(Ket-) Vektor im Hilbertraum $|\psi(t)\rangle$

Zugehöriger bra-Vektor $\langle\psi(t)|$

Es gibt Skalarprodukt

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle \quad \left(= \langle\psi_2|\psi_1\rangle^*\right)$$

normierte Zustände: $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

Ortsdarstellung:

$$\langle \underline{r}|\psi(t)\rangle = \psi(\underline{r},t)$$

„Wellenfunktion" (i.a. komplex)

$$|\psi(\underline{r},t)|^2 = \psi(\underline{r},t)\,\psi^*(\underline{r},t)$$

Aufenthaltswahrscheinlichkeit

alternativ:
Impulsdarstellung

$$\langle \underline{p} | \psi(t) \rangle = \tilde{\psi}(\underline{p}, t)$$

Übergang zwischen den Darstellungen:

$$\langle \underline{r} | \psi \rangle = \langle \underline{r} | \hat{1} | \psi \rangle = \int d\underline{p} \, \langle \underline{r} | \underline{p} \rangle \langle \underline{p} | \psi \rangle$$

Einheitsoperator

"Einschieben einer Eins"

benutze $\hat{1} = \int d\underline{p} \, \underbrace{|\underline{p}\rangle\langle\underline{p}|}_{\text{Projektionsoperator}}$

Eigenzustand des Impulsoperators $\hat{\underline{p}}$

benutze

$$\langle \underline{r} | \underline{p} \rangle = c \, e^{\frac{i}{\hbar} \underline{p} \cdot \underline{r}}$$

Ortsdarstellung der Impulseigenzustände
c Konstante, $c = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2}$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle \underline{r} | \psi \rangle}_{\psi(\underline{r})} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d\underline{p} \, e^{\frac{i}{\hbar} \underline{p} \cdot \underline{r}} \, \tilde{\psi}(\underline{p})$$

entspricht Fouriertransformation

(analog: $\hat{1} = \int d\underline{r} \, |\underline{r}\rangle\langle\underline{r}|$ Eigenzustände des Ortsoperators

Skalarprodukt im Ortsraum:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \hat{1} | \psi_2 \rangle$$

$$= \int d\underline{r}\, \langle \psi_1 | \underline{r} \rangle \langle \underline{r} | \psi_2 \rangle$$

$$= \int d\underline{r}\, \psi_1^*(\underline{r})\, \psi_2(\underline{r})$$

Eigenwertproblem

$$\hat{A} |n\rangle = a_n |n\rangle$$

Operator, typischerweise hermitesch

(hier sind $|n\rangle$ die Eigenzustände, a_n sind die Eigenwerte)

$$\sum_n \underbrace{|n\rangle\langle n|}_{\text{Projektor}} = \hat{1} \quad \text{Vollständigkeitsrelation}$$

$$\langle n | m \rangle = \delta_{nm} \quad \text{Orthonormiert}$$

Hat man die Eigenzustände, so kann man einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$ danach entwickeln

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |n\rangle$$

$$\Rightarrow c_n(t) = \langle n | \psi(t) \rangle$$

b) Messungen

- Messe eine Observable $\hat{A}$ im Zustand $|\psi\rangle$

mögliche Meßwerte bei einer ~~Einzel~~ Einzelmessung:

Eigenwerte a_n von $\hat{A}$

Erwartungswert bei vielen Messungen mit identisch präparierten Ausgangszuständen.

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{1}\,\hat{A}\,\hat{1}|\psi\rangle$$

$$= \sum_n \sum_{n'} \langle\psi|n\rangle \underbrace{\langle n|\hat{A}|n'\rangle}_{a_{n'}\,\delta_{nn'}} \langle n'|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \sum_n a_n |\langle\psi|n\rangle|^2$$

$$= \sum_n a_n |c_n|^2$$

Bei vielen Messungen von $\hat{A}$ im Zustand $|\psi\rangle$ tritt jeder Eigenwert a_n mit Wahrsch. $|c_n|^2$ auf

Beachte auch: Durch die Messung geht $|\psi\rangle$ in den jeweiligen Eigenzustand über $|\psi\rangle \to |n\rangle$

Abweichungen

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle = \langle(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle)^2\rangle$$

mit $\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$

$$= \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2$$

Messe verschiedene Observable $\hat{A}$, $\hat{B}$

dann gilt

$$\underbrace{\Delta A}_{\sqrt{\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle}} \Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|$$

Heisenbergsche Unschärferelation

$[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$

bekanntes Beispiel

$$\Delta x\, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Gleichzeitige scharfe Messung ist nur möglich, falls Kommutator verschwindet !!

beachte auch:

Kommutierende Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ haben dieselbe Eigenzustände !! Aber nicht dieselbe Eigenwerte

Bsp. $\hat{L}^2, \hat{L}_z$ $\quad \hat{L}^2|l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l,m\rangle$
$\hat{L}_z|l,m\rangle = \hbar m|l,m\rangle$

c) Darstellung von Operatoren

quantenmechanische Observablen werden dargestellt durch lineare Operatoren im Hilbertraum

adjungierte Operatoren:

sei $\hat{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle$

$$\Longleftrightarrow \langle\psi|\hat{A}^{+} = \langle\phi|$$

Skalarprodukt (Matrixelement)

$$\langle\psi_1|\hat{A}|\psi_2\rangle = \langle\hat{A}^{+}\psi_1|\psi_2\rangle$$

selbstadjungierte Operatoren:

$$\langle\psi_1|\hat{A}|\psi_2\rangle = \langle\hat{A}\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\hat{A}\psi_1\rangle^{*}$$

also $\hat{A}^{+} = \hat{A}$!!

selbstadjungiert, hermitesch

speziell: $|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle = |\psi\rangle$

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\hat{A}\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle^{*}$$

Erwartungswert ist reell !!

$\Rightarrow$ Physikalische Observablen werden dargestellt durch hermitesche Operatoren

Unitärer Operator:

$$\hat{U}^+\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^+ = 1$$

d) Dynamik von Quantensystemen

Zeitabhängige Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle$$

Hamiltonoperator

Formale Lösung (falls $\hat{H}$ zeitunabhängig)

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\,\underbrace{|\psi(t=0)\rangle}_{|\psi(0)\rangle}$$

$$= \hat{U}(t,0)\,|\psi(0)\rangle$$

Zeitentwicklungsoperator (unitär)

Def. über Potenzreihe:

$$\hat{U}(t,0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\left(-\frac{i}{\hbar}t\right)^{\nu}\hat{H}^{\nu}$$

adjungierte Schrödingergleichung:

$$\langle\psi(t)|\hat{H} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi(t)|$$

Zeitunabhängige Schrödingergl.:

$$\hat{H}|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$$ Eigenwertgleichung

Eigenzustände (zeitunabhängig)

Energie-Eigenwert

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{E}{\hbar}t}|\varphi\rangle$$

Dynamik der Erwartungswerte

betrachte $\langle \psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = \langle\hat{A}\rangle$
und leite einmal ~~na~~ nach der Zeit ab
und benutze die Schrödingergleichung

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \langle[\hat{A},\hat{H}]\rangle + \frac{\hbar}{i}\left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle$$

relevant bei expliziter Zeitabhängigkeit von $\hat{A}$

Folgerung:
falls $[\hat{A},\hat{H}]=0$ und $\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}=0$, dann ist $\hat{A}$ Erhaltungsgröße

(Analogie zur klass. Mechanik:

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$= \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t}$$

Bilder

Schrödingerbild: Operatoren zeitunabhängig
Zustandsvektor zeitabhängig
Dyn. Gl.: Schrödingergleichung

Heisenbergbild der Dynamik

Operatoren werden zeitabhängig

Relation zu den Schrödingeroperatoren ($\hat{A}_S$)

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^+(t,0)\, \hat{A}_S\, \hat{U}(t,0)$$

mit $\hat{U}(($