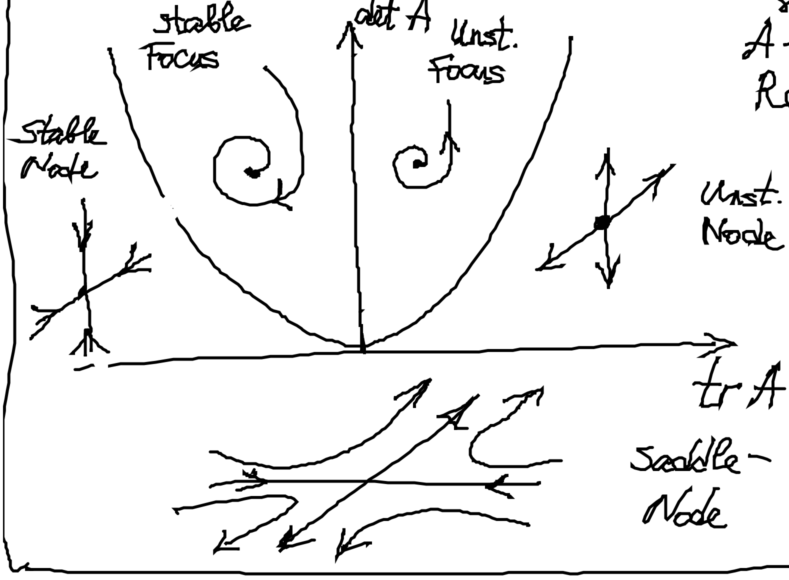
English Summary

Stability and long-time behavior

Asymptotic stability: $\delta\dot{\underline{x}} = \underbrace{(DF)_*}_{A} \delta \underline{x}$

$A \to$ eigenvalues λ_k

$\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0 \quad \forall k$



1.2.1 Langzeitverhalten von Hamilton'schen Vektorfelder

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

f – Freiheitsgrade

$2f$ dyn. Größen

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}$$

Linearisierung um Fixpunkt $\underline{x}^*$

$$\delta x(t) = \underline{x} - \underline{x}^*$$

$$\delta \underline{\dot{x}} = \underset{\text{Jakobian}}{\underbrace{A}}\, \delta \underline{x}$$

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{2f} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k$$

$$tr A = div \underline{F} = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0$$

$\Rightarrow$ Aus $\boxed{0 = tr A} = \sum_{i=1}^{2f} \lambda_i$ folgt,

dass keine asymtotische Stabilität möglich ist (sondern nur Lyapunov-stabilität)

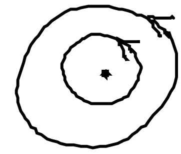
Beweis: Falls asymptotisch stabil, müssen alle $Re\, \lambda_i < 0$ sein.

$$\Rightarrow tr A = \sum_i Re \lambda_i + \underbrace{i \sum_i Im \lambda_i}_{0\text{, weil complex konjugiert}} < 0$$

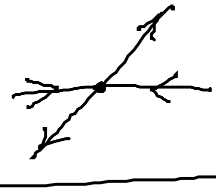
Bsp möglich $Re\, \lambda_i = 0$

$\lambda_i = \pm i\omega$ (Zentrum)

Falls $f = 1$ $(n = 2)$: Fixpunkte können nur Zentren (falls $\det A > 0$)



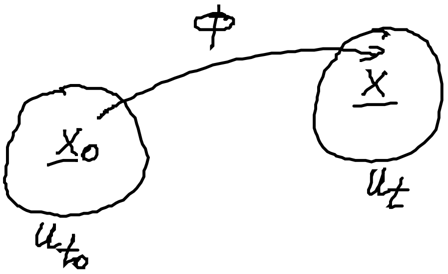
oder Sattelpunkt (falls $\det A < 0$) sein



Für Hamilton'sche Systeme folgt aus

$$tr A = div \underline{F} = 0$$

der Liouville'sche Satz der klass. statistischen Physik



$$\dot{\underline{x}} = F(\underline{x})$$
$$A = (DF)_*$$

V_t : Phasenraumvolumen

$$V_t = \int_{U_t} d^{2f}x = \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \; \det D\Phi_t(x_0) =$$

$$\det(D\Phi_t(\underline{x}_0)) \approx$$
$$\approx 1 + (t-t_0)\sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F_i}{\partial x_0^i}$$

weil $\det(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{B}}\varepsilon) =$
$$= 1 + \varepsilon \, \mathrm{tr}\, \underline{\underline{B}} + O(\varepsilon^2)$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0$$

$$\Phi_t(x_0) = \underline{x}(t) \approx \underline{x}_0 + (t-t_0)\dot{\underline{x}}$$

$$(D\Phi_t(x_0))_{ik} = \left(\frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^k}\right) \approx$$

Taylor
$$\approx \underbrace{\frac{\partial x^i(t_0)}{\partial x_0^k}}_{\delta_{ik}} + (t-t_0)\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^k}}_{\frac{\partial}{\partial x_0^k}F_i} + \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1+\ldots & & \\ & 1+\ldots & \\ & & 1+\ldots \end{pmatrix}$$

$$V_t = \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \Big[1 + (t-t_0)\underbrace{\sum_{i=0}^{2f}\frac{\partial F_i}{\partial x_0^i}}_{(\mathrm{div}\,\underline{F})_{x_0}} + \ldots \Big] =$$

$$= V_{t_0} + (t-t_0)\int d^{2f}x_0 \, (\mathrm{div}\,\underline{F}) + O(t-t_0)^2$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}V_t} = \lim_{t\to t_0} \frac{V_t - V_{t_0}}{t-t_0} =$$

$$= \int d^{2f}x_0 \underbrace{(\mathrm{div}\,\underline{F})_{x_0}}_{0 \text{ für Hamilton'sche Systeme}} = \boxed{0}$$

Phasenraumvolumina erhalten,

d.h. Fluss inkompressibel!

1.2.2. Dissipative Systeme

Für dissipative Systeme gilt für kleine Volumina die einen asymptotisch stabilen Fixpunkt $\underline{x}^*$ umschließen

$$\frac{dV_t}{dt} \approx \int \underbrace{d^{2f}x}_{V_t} \,(\mathrm{div}\,F)_{\underline{x}^*} = \Lambda \cdot V_t \Rightarrow$$

$$\boxed{V(t) = e^{\Lambda t}\, V_0} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

Λ: Phasenraumkontraktionsrate

$$\Lambda := \mathrm{div}\,\underline{F} = \mathrm{tr}\,A = \sum_i \mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$$

Allg. gilt

Def. Dissipative Systeme sind solche, die Phasenraumvolumina kontrahieren.

Asymptotisch stabile Fixpunkte (Knoten, Fokus) heißen Senken oder Attraktoren.

Beispiel für dissipatives System: Lorenzmodell

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -xz + rz - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}}$$

$\sigma, r, b > 0$

(abgeleitet aus der Temperatur (y,z) - und Strömungs (x) - verteilung einer inkompressiblen Flüssigkeit Rayleigh-Bénard-System)

Linearisierung

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z & -1 & r-x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \operatorname{tr} A = -(\sigma+1+b)$$

$$\Rightarrow V(t) = e^{-(\sigma+1+b)t} V_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

Phasenraumvolumina schrumpfen monoton!

Hermann Haken: semiklass. Lasergleichungen (Maxwell-Bloch-Gleichungen) sind äquivalent zu den Lorenzgleichungen.

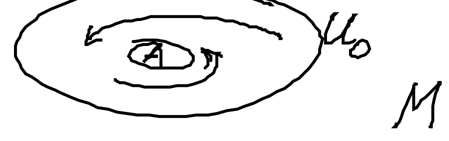
Das Langzeitverhalten dissipativer Systeme wird durch Attractoren bestimmt.

Def Sei F ein Vektorfeld auf $M = \mathbb{R}^n$.

Eine abgeschlossene, unter dem Fluss Φ_t invariante ($\Phi_t(A) \subseteq A$), unzerlegbare Teilmenge $A \subset M$ heißt Attraktor, falls

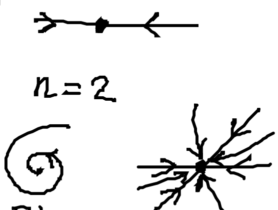
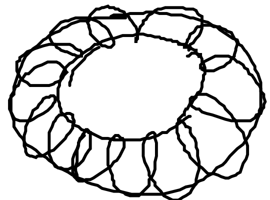
(i) $A \subset U_0$ (offene Umgebung von A) mit $\Phi_t(U_0) \subseteq U_0$ $(t>0)$

(ii) $\forall\, V$ mit $A \subset V \subset U_0$ $\exists\, T>0$, so dass $\Phi_t(U_0) \subset V$ $(t>T)$



d.h. es gibt ein Attraktorbecken U_0, aus dem der Fluss asymtotisch in den Attraktor läuft.

NB. Es kann mehrere koexistierende Attraktoren auf M geben.

Mindestdim. n des Phasenraumes	Attraktor	Attraktordim.	
1	Stabiler Fixpunkt	0	$n=1$, $n=2$  Fokus, Knoten
2	Stabiler Grenzzyklus (limit cycle)	1	 periodischer Orbit
3	Stabiler Torus T^2	2	 quasiperiodisch, 2 Frequenzen $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$
3	Seltsamer Attraktor (strage)	$2<d<3$ fraktal	chatotish