

5. Hydrodynamik in der NanoWelt

5.1. Die Navier-Stokes-Gleichung

- zentrale Gdgl. für Geschw. feld $v(x,t)$ einer Newtonschen Flüssigkeit

5.1.1 Grundgleichungen

- Beschränkung: inkompressible Flüssigkeit: $\text{div } v = 0$ (5.1)
- „Herleitung“ Massenerhaltung differential:
 - $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0$ (5.2)
 - Massenstromdichte

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0 \quad (5.2)$$

Massenstromdichte

Dichte $\rho = \text{konstant}$: $\rightarrow \text{div } v = 0$

- Navier-Stokes-Gl.: [\cong Newtonsche Gdgl. für Kontinuum]

$$\rho \left(\frac{dv}{dt} + v \cdot \nabla v \right) = - \nabla p + \underbrace{\eta \nabla^2 v}_{\text{Reibung!}} + \underbrace{\rho b}_{\text{Volumenkraftdichte}} \quad (5.4)$$

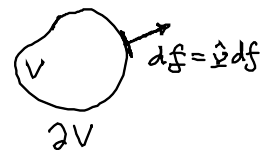
$\frac{dv}{dt}$ Trägheit Druck $\eta \dots$ Scler-Viskosität Bsp: $b = g \dots$ Gravitation elektr./magn. Ww

$$\left[\frac{dv(x,t)}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{\frac{dx_i}{dt}}_{v_i} \nabla_i v \right]$$

$\frac{dv}{dt}$... Beschl. eines Flüssigkeitsvolumens

- Umschreibung: Spannungstensor \underline{I} , in Komp. T_{ij}
 \rightarrow Oberflächkraft auf Flüssigkeitsvolumen:

$$F_{0i} = \int_{\partial V} \underbrace{T_{ij}}_{\underline{I} df} d\vec{f}_j \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_V \nabla_j T_{ij} d^3x = \int_V (\text{div } \underline{I})_i d^3x \quad (5.5)$$



o.B.:
$$T_{ij} = \underbrace{-p \delta_{ij}}_{(1)} + \underbrace{2\eta A_{ij}}_{(2)} \quad (5.6)$$

... beschreibt innere Kräfte in Flüssigkeit

(1) $\underline{F}_0 = - \int p d\underline{f}$, $p d\underline{f} \parallel d\underline{f}$! ... keine Schubspanne ($\perp d\underline{f}$)
 $\underline{F} = - \int \nabla p d^3x$
 $\nabla_j (p \delta_{ij})$

(2) Newtonsche Flüssigkeit (S.7)
dissipativer Anteil von $T_{ij} \sim A_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$... Scherrate

(i) $2\eta A_{ij}$... für isotrope Flüssigkeiten
(mehr Terme für komplexe, anisotrope Flüssigkeit)

(ii) $\omega_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j - \nabla_j v_i) \longrightarrow \omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_{jk}$ (S.8)
 $\longrightarrow \underline{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{v}$



Vortex
kein Beitrag zur
Dissipation

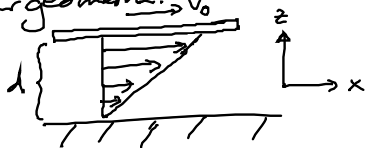
mit $\nabla_j T_{ij} = \eta \nabla_j (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$
 $= \eta \nabla^2 v_i$

(S.4) $\Rightarrow \boxed{\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \text{div } \underline{T} + \rho \underline{b}}$ (S.9)

• $\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}$... Nichtlinearität! \longrightarrow Turbulenz, Chaos

S.1.2 Stationäre Lösungen

• Schergeometrie: v_0



$b = 0$
 $p = p_0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{(S.9)} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$

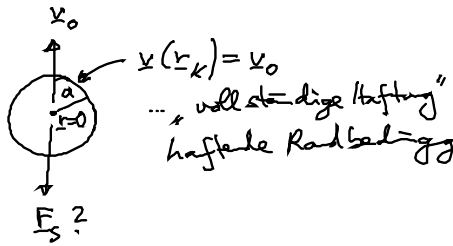
$\underline{v} = v(z) \underline{e}_x = v_0 \frac{z}{d} \underline{e}_x$ (S.10)

$\longrightarrow \boxed{T_{xz} = \eta \frac{\partial v(z)}{\partial z} = \eta \frac{v_0}{d}}$ (S.11)
 \longrightarrow Messe η

• Stokes'sche Reibung:

- (1) Translation: \rightarrow Milichram: e
 \rightarrow Einstein: N_A

$\underline{v}(\infty) = 0$
 $p(\infty) = 0$



- (1) $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$
 (2) $\underline{b} = 0$
 (3) Annahme:
 $\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \ll -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v}$

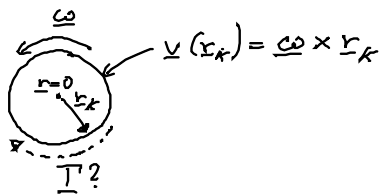
\Rightarrow o.B. $\left. \begin{aligned} \underline{v}_i(\underline{r}) &= \left[\frac{3}{4} \frac{a}{r} (\delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2}) + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{r}\right)^3 (1 - 3 \frac{r_i r_j}{r^2}) \right] v_{0j} \\ p(\underline{r}) &= \frac{3}{2} \eta \frac{a}{r^3} \underline{r} \cdot \underline{v}_0 \end{aligned} \right\} (S.12)$

\Rightarrow Stokes'sche Reibungskraft auf Kugel:

$\underline{F}_s = \int_{\partial V_k} \underline{T} d\underline{f} = -6\pi\eta a \underline{v}_0$ (S.13) \rightarrow Messe $\eta!$

(2) Rotation

$\underline{v}(\infty) = 0$



$\underline{v} = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \underline{\omega} \times \underline{r} \sim \frac{1}{r^2}$ (S.14)
 $p = ?$

\Rightarrow $\underline{I} = \int_{\partial V_k} \underline{r}_k \times \underline{T} d\underline{f} = -8\pi\eta a^3 \underline{\omega}$ (S.15)
 ... vis kose Drehmoment

5.1.3 Laminar \leftrightarrow turbulenter Fluß

- zähe Flüssigk. sind schwer zu mischen:
 [Videos Fig. S.1/S.2]

- Beobachtg: (1) Fluß stoppt sofort bei $\underline{F}, \underline{I} = 0 \rightarrow$ Trägheit unwichtig
 (2) $\left. \begin{aligned} \underline{I} &\rightarrow -\underline{I} \\ \underline{F} &\rightarrow -\underline{F} \end{aligned} \right\}$ Ausgangspunkt
 (3) Reibung, Dissipation \leftrightarrow Reversibilität? (2.HS ζ ?)
 ↳ Widerstand?

nein! Zeitskala: Diffusion \gg Fluß

(4) laminarer Fluß (Trägheit \ll Reibung):
 Flüssigk. schichten gleiten übereinander

Turbulenz (Trägheit \gg Reibung): wenig viskose Flüssigkeit
 Kaffeetasse
 kompl. Strömungsmuster

\Rightarrow Kriterien? Dimensionsanalyse!

S.1.4 Kritische Kraft

- isotherm, inkompressible Newtonsche Flüssigkeit: η, ρ
- Was heißt zäh/viskos?

$\eta \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}} \right]$ } keine einheitenlose Zahl
 $\rho \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ } \rightarrow kein intrinsisches Maß für Viskosität

aber: kritische viskose Kraft: $F_{\text{krit}} = \frac{\eta^2}{\rho}$ (S.16)

- äußere Kraft F :

$$\frac{F}{F_{\text{krit}}} = \begin{cases} \ll 1, \text{ laminarer, viskoser Fluß} \\ \gg 1, \text{ Turbulenz} \end{cases} \quad (\text{S.17})$$

- Beispiele: Tabelle S.1

H_2O : $F < 1 \text{ nN}$ \rightarrow zähe Flüssigkeit in Nanowelt

Zelle: $F \approx 1 \text{ pN}$ \rightarrow Reibung ist wichtig

- keine intrinsische Längenskala (außer Molekülgröße)

\rightarrow NS-Gln. sind skaleninvariant

\cong Physik ist auf allen Skalen die gleiche

\rightarrow Ähnlichkeitsprinzip: Autos \leftrightarrow Windkanal

