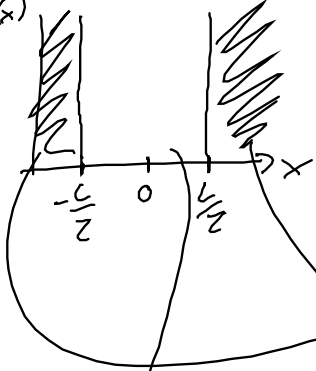


Unendl. hohe Pot. Wellenf. $V(x)$



$$V(x) = \begin{cases} \infty & |x| > \frac{L}{2} \text{, "außen"} \\ 0 & \text{, innen} \end{cases}$$

$$V(-x) = V(x) \\ \text{Symmetrisch}$$

$$\varphi_{\text{außen}}(x) = 0$$

gerade Lösungen:
$$\varphi_g(x) = \frac{A_g}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\ = \varphi_g(-x)$$

ungerade "
$$\varphi_u(x) = -\varphi_u(-x) = \frac{A_u}{2} (e^{ikx} - e^{-ikx})$$

$$\hbar k = \sqrt{2mE} \quad , \quad E > 0$$

Anschlußbedingung!

$$\varphi_{\text{außen}}\left(\pm \frac{L}{2}\right) \stackrel{!}{=} \varphi_{\text{innen}}\left(\pm \frac{L}{2}\right)$$

andernfalls wäre $\varphi'(x) = \frac{d\varphi}{dx}$ unendlich
 \Rightarrow Widerspruch zur Endlichkeit der kinet. Energie
 bzw. der kinet. Energie

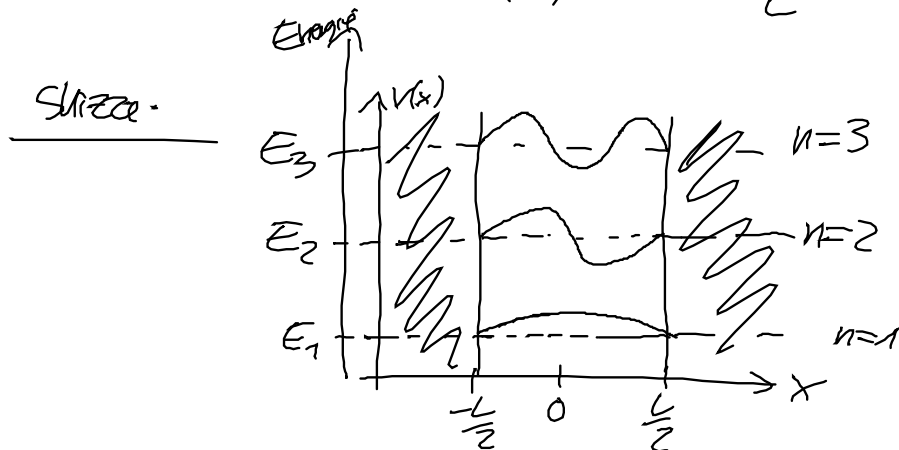
\Rightarrow Energie quantisiert !! (diskontinuierliches Spektrum)

$$E = E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \quad \text{mit } k = \frac{n\pi}{L}$$

mit $n = 1, 2, \dots$

n gerade: Eigenfunktion ungerade
 $\rightarrow \varphi(x) \sim \sin \frac{n\pi}{L} x$

n ungerade: Eigenfunktion gerade
 $\varphi(x) \sim \cos \frac{n\pi}{L} x$



Bemerkung zu den Energieeigenwerten

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \quad \text{mit } n=1, 2, 3, \dots$$

d.h. $n \neq 0$, es gibt also keinen Zustand mit verschwindender kinetischer Energie!

Hintergrund: Heisenbergsche Unschärferelation

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

benutze dies, um den minimalen Impuls abzuschätzen

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta p = \frac{\hbar}{2 \Delta x}$$

$$p_{\min} = \frac{\hbar}{2 \Delta x_{\max}}$$

hier: $\Delta x_{\max} = L \stackrel{!}{=} \text{Breite des Kastens}$

$$p_{\min} = \frac{\hbar}{2L} > 0$$

Anders ausgedrückt: Dadurch, dass das Teilchen im Kasten "lokalisiert" ist, ergibt sich $\Delta x < \infty$
 $\Rightarrow p$ kann nicht Null sein

$$\Rightarrow E_{n=1} > 0$$

Grundzustandsenergie

• Abstand ^{benachbarter} zweier Energieeigenwerte (d.h. zweier k -Werte)
 ist $\Delta k = \frac{\pi}{L}$

gegeben durch

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

d.h. $\Delta k \rightarrow 0$ für $L \rightarrow \infty$ „unendlich breiter Topf“

Dann wird das Energiespektrum kontinuierlich!

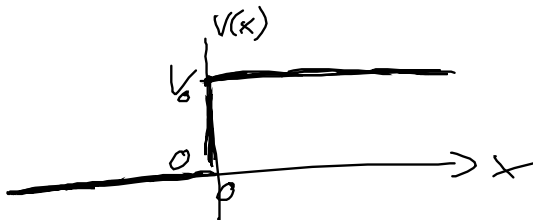
$\hat{=}$ Fall des freien Teilchens

• Zur Normierung der Wellenfunktion im Vakuum

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx |\varphi_g(x)|^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx |\varphi_u(x)|^2 = 1$$

$$\Rightarrow A_g = A_u = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

II.7.3. Potentialbarriere



mit V_0 endlich

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

$$\Rightarrow \varphi_{\pm}(x) = A_{\pm} e^{\pm \lambda x}$$

$$\text{mit } \hbar \lambda = \sqrt{2m(E-V)}$$

$$\begin{aligned} \text{rechts: } & V = V_0, \quad x > 0 \\ \text{links: } & V = 0, \quad x < 0 \end{aligned}$$

Fallunterscheidung notwendig!

a) $E > V_0$ „osillatorische Lösung“ (ähnlich wie im freien Fall)

b) $E < V_0$, aber $E > 0$ ($0 < E < V_0$)

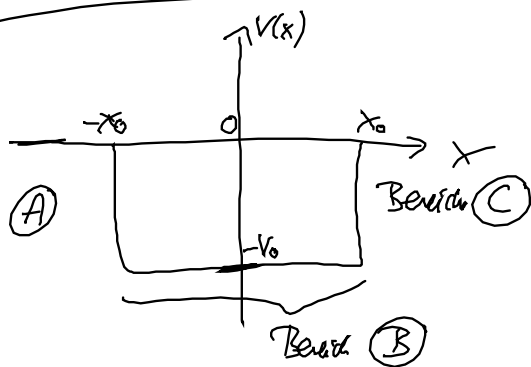
$\Rightarrow \hbar k$ ist reell mit $\hbar k = \sqrt{2m(V_0 - E)}$

\Rightarrow Lösung der Form e^{-kx} , $x > 0$
 e^{kx} , $x < 0$

verschwindet für $x \rightarrow \pm \infty$
exponentiell abklingend!!

Genauerer siehe Übung!!

II.7.4. Endlich tiefer Potentialtopf



endlich

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & |x| < x_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Diskutiere wieder 2 Fälle

a) $-V_0 < E < 0$ „gebundene Zustände“

b) $E > 0$ „Streuzustände“

a) Bereich (B)

Ansatz: $\psi(x) = B_+ e^{ikx} + B_- e^{-ikx}$

Klassisch erlaubtes Gebiet

mit $\hbar k = \sqrt{2m(V_0 - E)}$
 > 0

Bereich (A)

$$\varphi(x) = A e^{\lambda x} \quad \text{mit } \lambda = \sqrt{2m(E)}$$

verschwindet für $x \rightarrow -\infty$

Bereich (C)

$$\varphi(x) = C e^{-\lambda x} \quad \text{mit } \lambda = \sqrt{2m(E)}$$

klassische verbotene Lösungen

Festlegung der Konstanten

i) Fordere Stetigkeit von $\varphi(x)$ an den „Wahlstellen“
 $x = \pm x_0$

ii) Fordere außerdem die Stetigkeit von $\varphi'(x) = \frac{d\varphi}{dx}$!

Gilt auch für ii):

$$SG: -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = (E - V(x)) \varphi(x)$$

Falls also $V(x)$ keine unendliche hohen Sprünge aufweist, dann ist $\varphi''(x) = \frac{d^2\varphi}{dx^2}$ endlich

$\Rightarrow \varphi(x)$ ist stetig

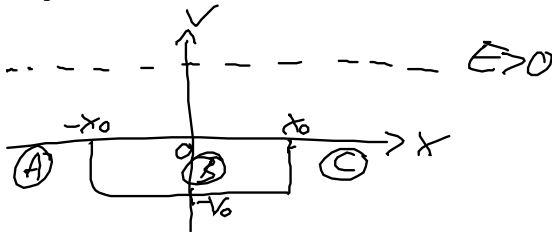
Schreibe i) und ii) für $x = \pm x_0$ auf

\Rightarrow vier Gleichungen für die vier Unbekannten A, B_+, B_-, C

Es ergibt sich:

- Man hat wieder Eigenfunktionen mit geradem und ungeradem Parität
- Energiespektrum ist diskret, aber mit anderen Bestimmungsbedingungen für k, l (im Vergleich zum ∞ hohen Toff)

b) Streuzustände beim endlich hohen Toff



Klassisch: Das Teilchen kann zu beiden Seiten ins Unendliche laufen!

quant: Wellenfunktion überall oszillierend, wobei die Wellenlänge von Bereich abhängen!

Ansätze:

$$\text{Bereich (A)}: \quad \psi(x) = \psi_0(x) + \psi_R(x)$$

$$\text{mit } \psi_0(x) = e^{ik_0 x}, \quad \text{mit } k_0 = \sqrt{2mE}$$

„einfallende Welle“
(einfallend)

Amplitude wurde o.B.d.A. auf eins gesetzt

und $\varphi_r(x) = A e^{-ik_0 x}$
reflektierte Welle

(typisches quantenmechan. Phänomen)

(B) : $\varphi(x) = B_+ e^{ikx} + B_- e^{-ikx}$

mit $k = \sqrt{2m(E+V_0)}$

(C) : $\varphi(x) = C e^{ik_0 x}$ mit $k_0 = \sqrt{2mE}$
 $= \varphi_d(x)$

durchgehende (transmitierte) Welle

Herleitung der Konstanten wie gehabt (φ, φ' stetig)

Man findet:

Für jedes $E > 0$ ergibt sich eine Lösung für die
Koeffizienten

→ Eigenwertproblem ist kontinuierlich

Stauzustände werden häufig über
die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsströme diskutiert

Einnern (Kap II.3)

Kontinuitätsgleichung: $\Rightarrow \hat{j}(\underline{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$
 Stromdichte
 mit $\psi = \psi(\underline{r}, t)$

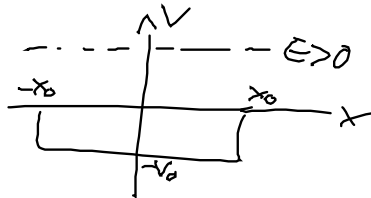
hier $\psi(\underline{r}, t) = \varphi(r) \cdot e^{-i\omega t}$
 \searrow ψe

$\omega = \frac{E}{\hbar}$

\Rightarrow Zur Berechnung von \hat{j} langt $\varphi(r)$ an!

Streuung am Potentialtopf

• Strom im Bereich (A)



einfallende Strom:

$$j_0 = \frac{\hbar}{2mi} \left(\varphi_0^* \frac{d\varphi_0}{dx} - \varphi_0 \frac{d\varphi_0^*}{dx} \right)$$

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_r(x)$$

Anteil aus der einfallende Well

$$j_0 = \dots = \frac{\hbar k_0}{m}$$

„reflektierter Strom“:

$$j_r = \frac{\hbar}{2mi} \left(\varphi_r^* \frac{d\varphi_r}{dx} - \varphi_r \frac{d\varphi_r^*}{dx} \right)$$

$$= \dots = -\frac{\hbar k_0}{m} |A|^2$$

A: Amplitude der reflektierten Well

• Strom im Bereich (C)

„transmittierter Strom“

$$j_d = \frac{\hbar k_0}{m} |C|^2$$

Man definiert

Transmissionskoeffizienten

$$T = \left| \frac{j d}{j_0} \right|$$

Reflexionskoeffizient

$$R = \left| \frac{j r}{j_0} \right|$$

Beachte: Aus der Teilchenzahlerhaltung folgt

$$\boxed{T + R = 1}$$

Speziell hier:

$$T = |C|^2, \quad R = |A|^2$$

Man findet

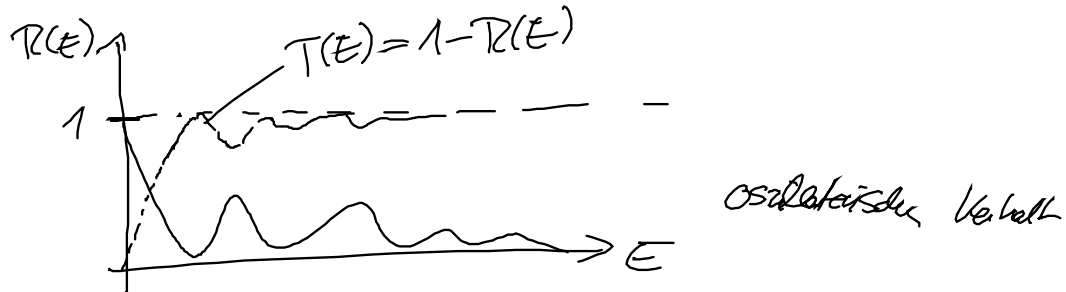
$$R = R(E) = \frac{4 \left(1 - \left(\frac{V_0}{E}\right)^2\right)^2 \sin^2 k x_0}{d^2}$$

$$\text{mit } \frac{k}{k_0} = \sqrt{\frac{E + V_0}{E}}$$

$$d = d(k, k_0, x_0) \quad \text{siehe Topfform}$$

Also $R \neq 0$

Teilchenwelle "erleidet" Reflexion am Potentialtopf !!
(unavoidable aus klass. Sicht!)

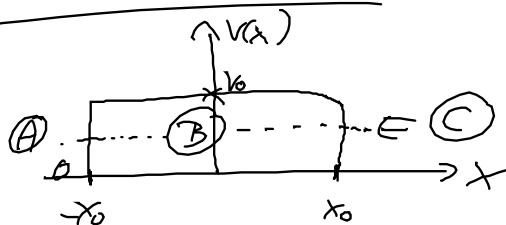


Wellenzug bedingt durch das ψ

Für $E \rightarrow \infty$ ergibt sich $R(E) \rightarrow 0$

plausibel, da der Teilchen den Topf dann nicht mehr spürt!

II.7.5 Tunneleffekt



V_0 endlich

"Dünne" Potentialwalle können "durchtunnelt" werden

betrachtet $0 < E < V_0$

$$\textcircled{A} : \underbrace{P_0 e^{ikx}}_{\text{einfallend}} + \underbrace{A e^{-ikx}}_{\text{reflektiert}}$$

$$k = \sqrt{2mE}$$

$$\textcircled{B} \quad \psi(x) = B_+ e^{\lambda x} + B_- e^{-\lambda x} \quad \text{mit } \lambda = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

$$\textcircled{C} \quad C e^{i k_0 x}$$

Es ergibt sich:

$$T(E) = \frac{4k^2}{(k^2 + (\lambda + k^2)^2) \sinh^2 2\lambda x_0} \quad \text{mit } k = \frac{\hbar}{m v_0} = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$$

$$R(E) = 1 - T(E)$$

Also $T > 0$, d.h. der Tunnelstrom ist ungleich Null!

Grenzwertbetrachtung:

$$\lambda x_0 \gg 1, \quad \lambda x_0 = \frac{x_0}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}$$

(das bedeutet: • sehr hohe Potentialwall im Vergleich zum Einfallsenergie
($V_0 - E$ groß)

• sehr breiter Potentialwall
 x_0 groß

$$\sinh^2(2\lambda x_0) \approx \frac{1}{4} e^{4\lambda x_0}$$

$$\Rightarrow T(E) \sim e^{-\frac{4x_0}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

T nimmt also exponentiell ab mit der
 Breite des Walls ($r \times x_0$) und der Wurzel
 der effektiven Energiereserve ($\sqrt{U_0 - E}$)

Physikalische Rückaus

z.B. α -Zerfall (Kernphysik) =

