

Messprozesse

Wu:

a) Ausgang von Messung

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad (\text{Annahme: } \langle \psi | \psi \rangle = 1)$$

Mittelwert über sehr viele Messungen
mit idealisch präparierten Ausgangszuständen $|\psi\rangle$

$$\text{Unschärfe } \Delta A = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2} \quad \text{i.A. } \Delta A > 0$$

Streuung (positive Größe)

Sei nun speziell $\Delta A = 0 \quad \hat{=} \text{alle Messungen ergeben genau dasselbe Ergebnis!!}$

\Leftrightarrow Zustand vor der Messung war ein Eigenzustand von \hat{A} !!

$$\text{und } \langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = a \quad \psi$$

(Eigenwert von \hat{A} zum Zustand $|\psi\rangle$!)

Gleichzeitige Messung von zwei Observablen:

Heisenberg'sche Unschärferelation:

Betrachte zwei Observablen \hat{A} und \hat{B}

Es gilt:

$$\Delta A \Delta B \geq \left| \frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right| \quad (*)$$

Produkt der Unschärfen
von \hat{A} und \hat{B}

Herleitung über Schwarz'sche
Ungleichung
(s. z.B. Bücher von
Messiah, Ficht)

Bemerkungen:

i) \otimes gibt eine untere Schranke für das Produkt der
Unschärfen

ii) Für zwei vertauschende Observablen $([\hat{A}, \hat{B}] = 0)$
gilt nach \otimes

$$\Delta A \Delta B \geq 0$$

wobei $\Delta F \Delta G = 0$ genau dann, wenn der betrachtete
Zustand ein gemeinsamer Eigenzustand der beiden
Observablen ist !!

iii) Spezialfall: Orts-Impuls-Unschärfenrelation

$$\left| \frac{1}{2i} [\hat{p}_i, \hat{x}_k] \right| = \left| \frac{1}{2i} \frac{\hbar}{i} \delta_{ik} \langle \hat{1} \rangle \right| = \delta_{ik} \frac{\hbar}{2}$$

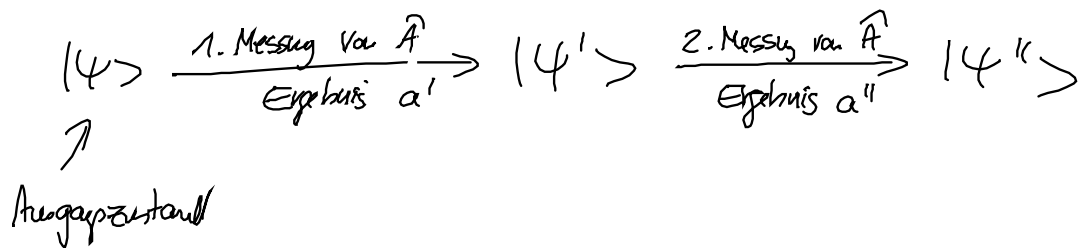
\nearrow
Komponente von \hat{p} bzw. \hat{x}

$$\otimes \Rightarrow \Delta p_i \Delta x_k \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ik}$$

Zurück zu Messung einer Observablen \hat{A}

b) Einfluss der Messung auf den Zustand des quantenmechanischen
Systems

betrachte gedanklich folgenden Messprozess



Experimentell findet man

$$a'' = a'$$

Die zweite Messung ergibt ^{genau} dasselbe Ergebnis wie die erste Messung!

\Leftrightarrow d.h., die 2. Messung ist stochastisch

Das kann nur sein, falls $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand von \hat{A} ist und $a'' = a'$ der zugehörige Eigenwert

Folgerungen:

(i) Auch beliebigen Ausgangszustand $|\psi\rangle$ sind die überhaupt möglichen Messwerte die Eigenwerte von \hat{A} !

(ii) Durch die Messung verändert sich der Zustand des Systems !!
 (Wechselwirkung zw. System und Messung !!)
 \Downarrow Zum Klass. Bild!

Insbesondere:

Durch die Messung geht das System in einen der Eigenzustände von \hat{A} über!

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{Messung}} |\psi'\rangle \quad \text{mit} \quad \hat{A}|\psi'\rangle = a'|\psi'\rangle = a''|\psi'\rangle$$

Ausgangszustand

Man spricht von einer "Reduktion des Zustandsvektors" durch die Messung!!

c) Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Messwertes

Motivation:

Nur falls der Ausgangszustand $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand von \hat{A} ist, wird mit Sicherheit der zugehörige Eigenwert gemessen!

Ansonsten kann man nur Wahrscheinlichkeit angeben!

Schreibe dazu den Erwartungswert von $\langle \hat{A} \rangle$

benutze $\hat{A}|n\rangle = a_n|n\rangle$ (Eigenwertgleichung), $\langle n|m \rangle = \delta_{nm}$ (orthonormale Eigenzustände) und $\sum_{n=1}^M |n\rangle\langle n| = \hat{1}$ (Komplettheit)

diskretes Spektrum

Eigenzustände bilden eine Basis!!

Damit

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{1} \hat{A} \hat{1} | \psi \rangle$$

Ausgangszustand der Messung von \hat{A} , nicht notwendigerweise Eigenzustand!!
($\langle \psi | \psi \rangle = 1$)

Eigenzustand von \hat{A} !

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^M \sum_{n'=1}^M \langle \psi | n \rangle \langle n | \hat{A} | n' \rangle \langle n' | \psi \rangle \\ & \quad a_n \langle n | n' \rangle \\ & \quad = a_n \delta_{nn'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \hat{A} \rangle &= \sum_{n=1}^M \langle \psi | n \rangle a_n \langle n | \psi \rangle \\ &= \sum_{n=1}^M a_n |\langle n | \psi \rangle|^2 \end{aligned}$$

Ergebnis!

Dies legt folgende Definition nahe.

$|\langle n | \psi \rangle|^2 = w_n$ Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Messwertes a_n .
 a_n ist Eigenwert von \hat{A} !

$$\Rightarrow \langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \sum_{n=1}^M a_n w_n$$

Erwartungswert von \hat{A} $\hat{=}$ Mittelwert über die Eigenwerte,
 dem Wahrscheinl. durch w_n
 gegeben ist !!
 (Mittelwert über sehr viele
 Messen von \hat{A} mit identischen
 Ausgangszustand)

Bemerkung

formal

a) diese Definition von w_n ist konsistent mit unserer früheren Definition
 von Aufenthaltswahrscheinlichkeit (Schrödingersche Wellenmechanik)

$$g(\underline{r}) = \psi(\underline{r}) \psi^*(\underline{r})$$

$$= \langle \underline{r} | \psi \rangle \langle \psi | \underline{r} \rangle = |\langle \underline{r} | \psi \rangle|^2$$

b) aus $\langle \hat{A} \rangle = \sum_{n=1}^M a_n w_n$ mit $w_n = |\langle n | \psi \rangle|^2$

fall: Wenn $| \psi \rangle$ selbst ein Eigenzustand ist, also $| \psi \rangle = | n \rangle$

dann gilt: $w_n = |\langle n | n \rangle|^2 = | d_{nn} |^2$

$$= 1, \text{ falls } n = n'$$

$$= 0, \text{ sonst}$$

Dann $\langle \hat{A} \rangle = \sum_{n=1}^M a_n d_{nn}$

$$= d_{nn}$$

$$= a_{n'}$$

Nachmaliges Umschreiben mit Hilfe des Projektionsoperators

$$\hat{P}_n = |n\rangle\langle n|$$

Projektor zum Zustand $|n\rangle$

$$\left(\begin{array}{l} \text{wir hatten} \\ \sum_{n=1}^M |n\rangle\langle n| = \hat{1} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^M \hat{P}_n = \hat{1} \end{array} \right)$$

Folgerungen aus dieser Definition:

$$\begin{aligned} \hat{P}_n |m\rangle &= |n\rangle\langle n|m\rangle \\ &= \delta_{nm} |n\rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ |n\rangle, & m = n \end{cases} \end{aligned}$$

$|n\rangle$ sei auch Element der Basis, d.h. $\langle m|n\rangle = \delta_{nm}$

\hat{P}_n beantwortet die Frage:
Ist das System im Zustand $|n\rangle$?

Aufgaben:

wir hatten: $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$ Zweimaliges Umschreiben der $\hat{1}$

$$= \sum_{n=1}^M a_n \underbrace{\langle \psi | n \rangle \langle n | \psi \rangle}_{\text{entspricht } \hat{P}_n} \quad !!$$

$$= \sum_{n=1}^M a_n \langle \psi | \hat{P}_n | \psi \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^M a_n \langle \hat{P}_n \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^M a_n w_n$$

$n=1$

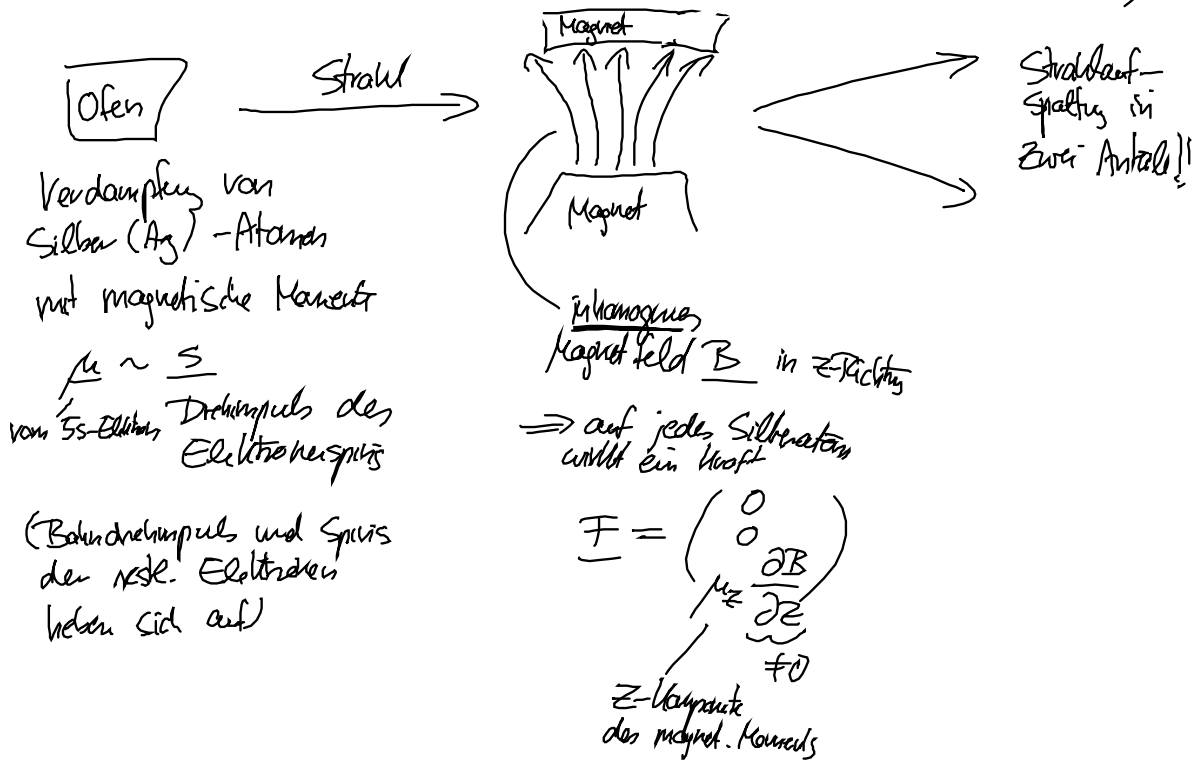
$$\Rightarrow \boxed{\omega_n = |\langle n | \psi \rangle|^2 = \langle \hat{P}_n \rangle = \langle \psi | \hat{P}_n | \psi \rangle}$$

Sei speziell der Ausgangszustand $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand,
z.B. $|\psi\rangle = |m\rangle$

$$\begin{aligned} \omega_n = \langle \hat{P}_n \rangle &= \langle m | \hat{P}_n | m \rangle \\ &= \langle m | n \rangle \langle n | m \rangle = \delta_{nm} \delta_{nm} = \delta_{nm} \end{aligned}$$

Illustration: Sturm-Gerlach-Versuch

(gleichzeitig der erste Hinweis auf die Existenz des Spins eines Elektrons !!)



Interpretation / Diskussion

- Vor Eintritt des Strahls in das inhomogene \underline{B} -Feld sind die Richtungen von $\underline{\mu}$ regellos verteilt !!

- \underline{B} -Feld führt zu einer Strahlaufspaltung, "Richtungsquantelung"

denn: die Projektion des Spins auf die Feldrichtung (z -Richtung) kann nur zwei diskrete Werte annehmen.

$$\mu_z \sim \pm \frac{1}{2}$$

Inhomogenität des Feldes \rightarrow positive oder negative Abweichung je nach Vorzeichen von μ_z !!

Interpretation als Messprozess

- Die beiden Strahlen nach Durchlaufen des Magnetfeldes entsprechen den Eigenzuständen $|\phi_+\rangle$, $|\phi_-\rangle$ des magnetischen Moments $\hat{\mu}$ zu den Eigenwerten $\mu_z \sim \pm \frac{1}{2}$

- Wahrscheinl. für den Eintritt eines bestimmten Messwertes

$$w_+ = |\langle \psi | \phi_+ \rangle|^2 = \langle \hat{P}_{\phi_+} \rangle$$

$$w_- = |\langle \psi | \phi_- \rangle|^2 = \langle \hat{P}_{\phi_-} \rangle$$

III. 9. Die Axiome der Quantenmechanik

1) Zustand des quantenmechanischen Systems

→ Zustandsvektor $|\psi\rangle$ im Hilbertraum

2) Physikalische Observablen (Meßgröße) A

→ hermitescher Operator \hat{A} (mit $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$)

3) Messungen

i) Mittelwert der Observablen bei vielen Messungen mit identischen Ausgangszuständen $|\psi\rangle$ ergibt den

$$\Rightarrow \text{Erwartungswert } \langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \\ = \sum_{n=1}^M a_n w_n$$

mit a_n : Eigenwert

w_n : $|\langle n | \psi \rangle|^2$
Eigenzustand

$$\text{bzw. } w_n = \langle \psi | \hat{P}_n | \psi \rangle$$

ii) Die möglichen Messwerte einer Messung sind jeweils die Eigenwerte a_n

(Erwartungswert $\hat{=}$ Mittelwert über die Eigenwerte!)

(ii) Durch die Messung wird der Zustand „reduziert“

$$|\psi\rangle \longrightarrow |n\rangle \quad (\text{mit } \hat{A}|n\rangle = a_n|n\rangle)$$

Eigenzustand

(4) Zeitentwicklung der Zustände: Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$