

Ideales Fermigas - Zustandsgleichungen (kalorisch)

Entartet

$$u \approx \frac{3}{5} \bar{N} E_F \left(1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right) \quad \beta \gg 1$$

Nicht-Entartet

$$u \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left(1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c(T)} \right) \quad N_c(T) \sim T^{3/2}$$

4.5. Ideales Bosegas

analog wie Fermigas, nur Besetzungszahlen diesmal

$$N_j = 0, 1, 2, \dots$$

↳ nummeriert Energiezustände

Großkanonische Zustandssumme

$$Z_{GK} = \sum_{N_1, \dots, N_L} e^{-\beta \sum_j (E_j - \mu) N_j}$$

$$\stackrel{\text{Bosonen}}{=} \prod_j \sum_{N_j=0}^{\infty} t_j^{N_j} \quad \text{mit } t_j = e^{\beta(\mu - E_j)}$$

$$= \prod_j \frac{1}{1 - t_j} = \prod_j \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - E_j)}}$$

geometrische Reihe
konvergiert, wenn $t_j < 1$
also $E_j > \mu$

Wahrscheinlichkeit, die Besetzungszahl N_1, N_2 der 1-Teilchen Zustände E_1, E_2, \dots zu finden

$$P(N_1, N_2, \dots) = \frac{1}{Z_{GK}} e^{-\beta \sum_j (E_j - \mu) N_j}$$

$$= \prod_j \underbrace{(1-t_j) t_j^{N_j}}_{p(N_j)}$$

separiert!

$$p(N_j) = \underbrace{(1 - e^{-\beta(\mu - \epsilon_j)})}_{e^{\psi_j}} e^{\beta(\mu - \epsilon_j) N_j}$$

Mittlere Besetzung im Zustand ϵ_j :

$$\alpha = \beta\mu$$

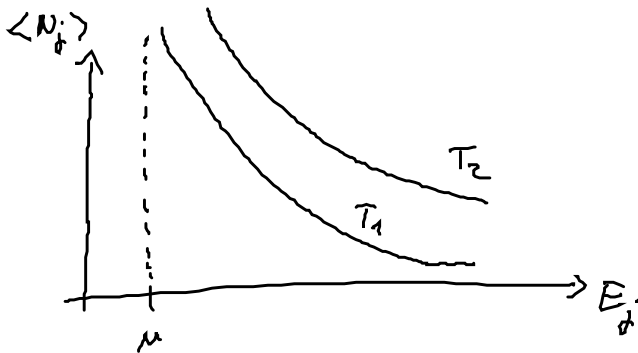
$$\langle N_j \rangle = \frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi_j$$

$$= -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln(1 - t_j) = \frac{t_j}{1 - t_j}$$

$$= \frac{1}{t_j^{-1} - 1}$$

$$\langle N_j \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_j - \mu}{kT}} - 1}$$

Bose-Verteilung

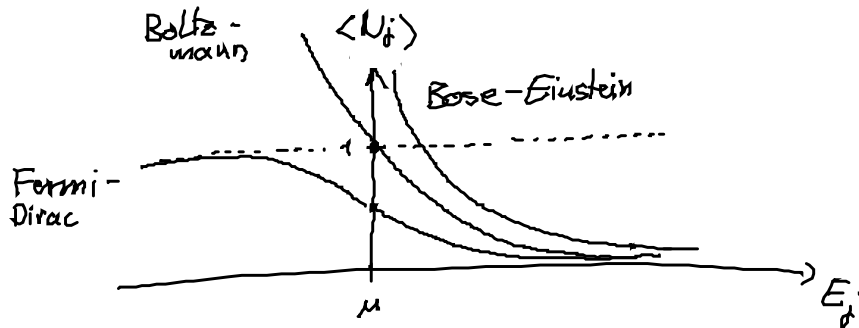


$T_1 < T_2$ divergiert für $\epsilon_j \rightarrow \mu$

Vergleich aller 3 Verteilungen

$$\langle N_j \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E_j - \mu}{kT}} - \epsilon}$$

mit $\epsilon = \begin{cases} -1 & \text{Fermi-Dirac} \\ 0 & \text{Maxwell-Boltzmann} \\ 1 & \text{Bose-Einstein} \end{cases}$



"Übergang zum Quasikontinuum der Zustände $E = \frac{p^2}{2m}$ "

$$\ln Z_{GK} = \sum_j \ln \Xi_j = - \sum_j \ln (1 - \gamma e^{-\beta E_j})$$

($\gamma = e^{\beta \mu}$ Fugazität)

$$\approx -(2s+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \ln (1 - \gamma e^{-\beta \frac{p^2}{2m}})$$

part. Integration

$$= -(2s+1) \frac{4\pi V}{h^3} \left\{ \frac{p^3}{3} \ln (1 - \gamma e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}) \right\}_0^\infty - \int_0^\infty dp \frac{p^3}{3} \frac{\frac{\beta p}{2m} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}}{1 - \gamma e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}}$$

$$= \frac{2}{3} \beta (2s+1) \frac{V}{h^3} \int_0^\infty dp 4\pi p^2 \langle N(p) \rangle E(p)$$

$$= \frac{2}{3} \beta U$$

$$\Rightarrow \boxed{pV = kT \ln Z_{\text{ex}} = \frac{2}{3} U} \quad \text{wie für Fermigas}$$

- Verdünntes Bosegas (quasi-klass., nichtentarteter Grenzfall)
Entwicklung nach Potenzen von $y = e^{\mu/kT} \ll 1$

$$\bar{N} = \sum_j \langle N_j \rangle \approx (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{e^{\frac{p^2/2m - \mu}{kT}} - 1}$$

$$y := \frac{p^2}{2mkT} \quad \text{Substitution}$$

$$= \frac{2S+1}{2} \frac{4\pi V}{h^3} (2mkT)^{3/2} \int_0^\infty dy \frac{y^{1/2}}{y e^y - 1} \quad (\text{Taylor})$$

$$\approx \frac{2S+1}{2} \frac{4\pi V}{h^3} (2mkT)^{3/2} \left\{ \underbrace{\int_0^\infty dy y^{1/2} e^{-y}}_{\frac{1}{2} \sqrt{\pi}} + \underbrace{y^2 \int_0^\infty dy y^{1/2} e^{-2y}}_{\frac{1}{2^{5/2}} \sqrt{\pi}} \right\}$$

$$\bar{N} \approx V \frac{2S+1}{\lambda^3} \underbrace{e^{\mu/kT}}_y \left[1 + \frac{1}{2^{3/2}} e^{-\mu/kT} \right]$$

↑
Quantenkorrektur

$$\lambda := \left(\frac{h^2}{2\pi m kT} \right)^{1/2} \quad \text{Therm. Wellenlänge}$$

$$= \left(\frac{2S+1}{n_c} \right)^{1/3}$$

Elim. von μ durch \bar{U} :

0. Näherung $\bar{U} = V \frac{2S+1}{\lambda^3} y$

1. Näherung $\bar{U} = V \frac{2S+1}{\lambda^3} y \left[1 + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\bar{U} \lambda^3}{V(2S+1)} \right]$

$\Rightarrow y = e^{\mu/kT} \approx \frac{\bar{U} \lambda^3}{V(2S+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\bar{U}}{N_c} \right)$ (*)

Innere Energie

$$U = (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{\frac{p^2}{2m}}{e^{\left\{ \frac{p^2}{2m} - \mu \right\} / kT} - 1}$$

$$= \frac{2S+1}{2} \frac{4\pi V}{h^3} (2mkT)^{3/2} kT \int_0^\infty dy y^{3/2} \frac{y e^{-y}}{1 - y e^{-y}}$$

$$\approx \underbrace{\int_0^\infty dy y^{3/2} e^{-y}}_{\frac{3}{4} \sqrt{\pi}} + \int_0^\infty dy y^{3/2} e^{-2y} \dots$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^{5/2}} \frac{3}{4} \sqrt{\pi}}$$

$$U \approx \frac{3}{2} kT V \frac{2S+1}{\lambda^3} e^{\mu/kT} \left[1 + \frac{1}{2^{5/2}} e^{\mu/kT} \right]$$

↳ Einsetzen von (*)

(kleine Dichten)

$$U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{V(2S+1)} \bar{N} \right]$$

↕ Quantenkorrektur

$$pV = \frac{2}{3} U \approx kT \bar{N} \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{VN_c} \right]$$

kalorische
 Zustandsgleichung

thermische
 Zustandsgleichung

↑
 Bose - Anziehung : Quantenkorrektur
 (erniedrigter Druck)

Bose - Einstein - Kondensation

(Theor.: Einstein 1925)

exp.: Ketterle, Cornell & Wieman
 1995

Nobelpreis 2001

Grundzustand des Bose - Gases $E_0 = 0$

$$\langle N_0 \rangle = \frac{1}{\xi^{-1} - 1} = \frac{\xi}{1 - \xi}$$

Die mittlere Besetzungszahl
 dieses Quantenzustandes
 kann makroskopisch groß
 werden für $\xi \approx 1$

d.h. $\langle N_0 \rangle \approx \bar{N}$ (alle Teilchen im Grundzustand)
 kondensiert

allgemein $\bar{N} = \langle N_0 \rangle + N'$ mit $N' = \sum_{j>0} \langle N_j \rangle$

(i) $\eta \ll 1$ (normale Phase) : $\langle N_0 \rangle$ vernachlässigbar
 \rightarrow verdünntes Bosegas

(ii) $\eta \approx 1$ (kondensierte Phase) $N' \approx \sum_{j>0} \frac{1}{e^{\beta \epsilon_j} - 1} \ll \bar{N}$

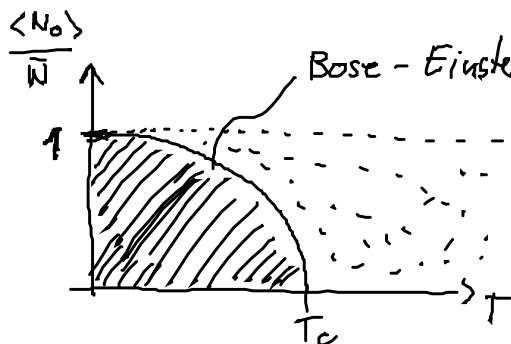
normale Komp $\frac{N'}{V} \stackrel{\text{kont.}}{\approx} (2s+1) \lambda^{-3/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy y^{1/2} e^{-y}$
 $\sim T^{3/2}$

$\rightarrow \frac{N'}{\bar{N}} = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$ T_c definiert durch $\eta \approx 1$

$$\frac{\langle N_0 \rangle}{\bar{N}} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} & \text{für } T < T_c \\ 0 & T \geq T_c \end{cases}$$



Bruchteil der
kondensierten Teilchen

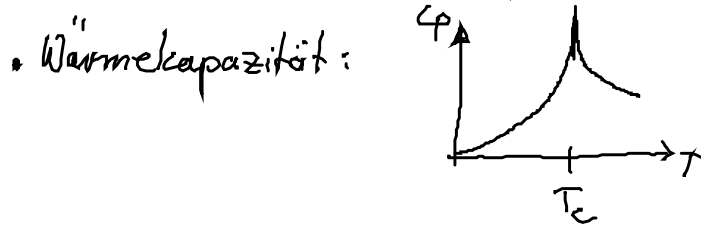


2 komponentiges Gas

normale + kondensierte
Komponente

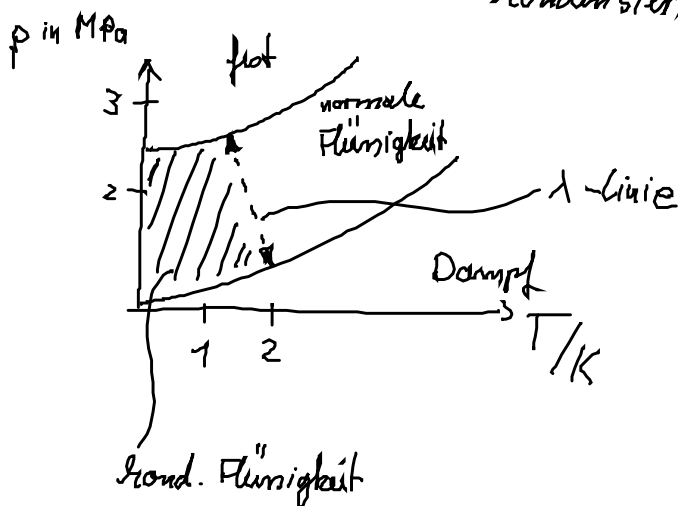
Phasenübergang bei T_c : normale \rightarrow kondensierte Phase

- makroskopische Quantenphänomene!



Phasenübergang
2. Ordnung

- Anwendung: Suprafluide Phase von ^4He bei tiefen Temperaturen ähnelt 2-komp. Flüs. aus normaler und kondensierter Phase



- stark wechselwirkendes Bosegas

Bose-Einstein-Kondensation mit schwach wechselwirkendem Gas.

Vor. für experimentelle Beobachtung $\frac{\bar{N}}{V} \lambda^3 > 2.61$

- hohe Phasenraumdichte
- sehr tiefe Temperaturen ($T < 1 \mu\text{K}$ bei $\frac{\bar{N}}{V} \sim 10^{19} \text{ cm}^{-3}$)

\rightarrow Laserkühlung von Atomen

+ Verdampfungskühlung

Cornell & Wieman : Rb - Atome (1995) $\sim 10^3$ Atome

Ketterle : Na - Atome (1995) $\sim 10^5$ Atome

↪ Endo