

# Fortsetzung 5.2. Ideales Fermigas

bisher hergeleitet:
 

- Großkanonische Zustandssumme  $Z_{GK}$
- Mittlere Besetzungszahl (Fermi-Verteilung)

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu}{kT}} + 1}$$

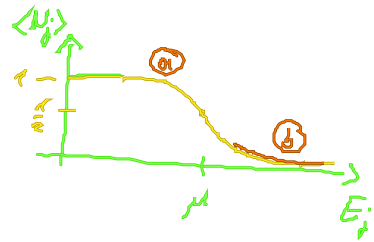
$$Z_{GK} = \prod_{i=1}^L \bar{z}_i \quad \bar{z}_i = 1 + e^{-\beta(\mu - E_i)}$$

Ziel heute: Zustandsgleichung für 2 Grenzfälle

$$\zeta = e^{\frac{\mu}{kT}}$$

(a)  $\rightarrow$  entartetes Fermigas  
 $\zeta \gg 1$  hohe Ordnung

(b)  $\rightarrow$  nichtentartetes Fermigas  
 $\zeta \ll 1$ , aber  $\mu < 0$   
stark verschmirt



Übergang  $\sum_i \rightarrow \int dp$

$$\left[ \begin{aligned} E_i &= \frac{p_i^2}{2m} \\ pV &= kT \ln Z_{GK} \end{aligned} \right.$$

$$\ln Z_{GK} = \sum_i \ln(1 + \zeta e^{-\beta E_i})$$

$$\approx (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \ln(1 + \zeta e^{-\beta \frac{p^2}{2m}})$$

$$\text{part. Integration} = (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \left\{ \underbrace{\frac{p^3}{3} \ln[1 + \zeta e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}]}_0 \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dp \frac{p^3}{3} \frac{-\beta p}{m} \frac{\zeta e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}}{1 + \zeta e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}} \right\}$$

}

$$= \frac{2}{3} (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{\frac{\beta p^2}{2m}}{\frac{1}{V} e^{\frac{\beta p^2}{2m}} + 1}$$

$$= \frac{2}{3} \beta (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \langle N(p) \rangle E(p)$$

$$\left[ = \frac{2}{3} \beta \sum_j \langle N_j \rangle E_j \right]$$

$$= \frac{2}{3} \beta U$$

innere Energie  $U$ 

$$\boxed{pV = kT \ln Z_{GL} = \frac{2}{3} U}$$

(i) gilt auch für ideales Gas! und für Bose Gase (siehe später)  
 $\hookrightarrow \begin{cases} pV = \bar{U} kT \\ U = \frac{3}{2} \bar{U} kT \end{cases} \Rightarrow pV = \frac{2}{3} U$

Gesamtzahl der Teilchen

$$\bar{N} = \frac{4\pi V}{h^3} (2S+1) \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{e^{(\frac{p^2}{2m} - \mu)/kT} + 1}$$

### Innere Energie

$$U = \frac{4\pi V}{h^3} (2S+1) \int_0^{\infty} dp p^2 \frac{\frac{p^2}{2m}}{e^{(\frac{p^2}{2m} - \mu)/kT} + 1}$$

Lösen der Integrale: Substitution  
 $\frac{p^2}{2mkT} = y$   $pdp = mkT dy$

$\frac{\mu}{kT} = \eta \quad (= -\alpha)$  reduziertes  
Fermiintegral

$$\bar{N} = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{(2S+1)}{2} (2mkT)^{3/2} \int_0^{\infty} dy \frac{y^{1/2}}{e^{y-\eta} + 1}$$

$$U = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2S+1}{2} (2mkT)^{3/2} \int_0^{\infty} dy \frac{y^{3/2}}{e^{y-\eta} + 1}$$

Definition: Fermi-Dirac-Integral der Ordnung  $s$

$$F_s(\eta) := \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^{\infty} dy \frac{y^s}{e^{y-\eta} + 1}$$

Fall a) Entartetes Fermigas  $\eta \gg 1$  ( $\approx y \gg 1$ , hohe Ordnung)

$$\Gamma(s+1) F_s(\eta) = \frac{1}{s+1} \int_0^{\infty} dy \frac{d}{dy} (y^{s+1}) \frac{1}{e^{y-\eta} + 1}$$

$$\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{s+1} \underbrace{\left[ \frac{y^{s+1}}{e^{y-\eta} + 1} \right]}_0^{\infty} + \frac{1}{s+1} \int_0^{\infty} dy y^{s+1} \frac{e^{y-\eta}}{(e^{y-\eta} + 1)^2}$$

$$x = y - \eta = \frac{1}{s+1} \int_{-\eta}^{\infty} dx (x+\eta)^{s+1} \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

Entwicklung:  $(x+\eta)^{s+1} \approx \eta^{s+1} + (s+1)\eta^s x + \frac{s(s+1)}{2}\eta^{s-1}x^2 + \dots$   
 (Taylor um  $x=0$ )

$$\Gamma(s+1)F_s(\eta) \approx \frac{\eta^{s+1}}{s+1} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^x}{(e^x+1)^2} + \eta^s \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^x}{(e^x+1)^2} + \frac{s}{2} \eta^{s-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2 e^x}{(e^x+1)^2} + \dots$$

= 0 da Integral ungerade

$\left[ -\frac{1}{e^x+1} \right]_{-\infty}^{\infty} = 1$

$\frac{\pi^2}{3}$

$$F_s(\eta) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \left[ \frac{\eta^{s+1}}{s+1} + s \frac{\pi^2}{6} \eta^{s-1} + O(\eta^{s-3}) \right]$$

Speziell

$$F_{1/2}(\eta) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\eta^{3/2}}{3/2} + \frac{\pi^2}{12} \eta^{-1/2} \right]$$

$$F_{3/2}(\eta) \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\eta^{5/2}}{5/2} + \frac{\pi^2}{4} \eta^{1/2} \right]$$

$$\Rightarrow \bar{N} = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2mkT)^{3/2} \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{\mu}{kT} \right)^{3/2} + \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{\mu}{kT} \right)^{-1/2} \right]$$

$$= \frac{2}{3} \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2m\mu)^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right] \quad (1)$$

[ Halbleiter:  $\mu = E_F \rightarrow n \sim E_F^{3/2}$  Fermi-Niveau ]

$$U = \frac{2}{5} \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2m)^{3/2} \mu^{5/2} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow U = \frac{3}{5} \bar{N} E_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_F} \right)^2 \right] \quad \text{Zahlreiche Zustandsgleichung}$$

$$pV = \frac{2}{3} U = \frac{2}{5} \bar{N} E_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_F} \right)^2 \right] \quad \text{Thermische Zustandsgleichung}$$

Druck  $p$  des Fermigas ist um den Faktor  $\sim \frac{E_F}{kT}$  größer als im klass. idealen Gasen ( $pV = \bar{N}kT$ )  
 [ z.B.:  $E_F = 1\text{eV} \hat{=} T \sim 10^4 \text{K} !$  ]

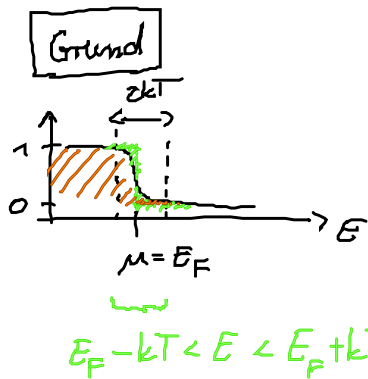
Grund: Pauli-Prinzip (eff. Abstoßung der Teilchen)

spezif. Wärme  $c_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{\pi^2}{2} \bar{N} k \frac{kT}{E_F}$

$$c_v = \frac{\pi^2}{2} R \frac{kT}{E_F} \sim T \quad \text{um Faktor } \frac{kT}{E_F}$$

ähnlich als im klass.  
idealen Gas

$$c_v = \frac{3}{2} R$$



Nur Teilchen in der Aufweichungszone der Fermi-Verteilung tragen zur spez. Wärme bei.

Zahl  $\Delta N = \bar{N} \frac{kT}{E_F}$

$$\rightarrow \Delta u \sim \bar{U} \frac{(kT)^2}{E_F} \rightarrow c_v \sim \bar{U} k \frac{kT}{E_F}$$

Beispiel für entartetes Fermigas

- Elektronen im Metall (hohe Dichte!)
- Elektronen im Halbleiter bei hoher Dotierung oder tiefer Temp.

**b** Nicht-entartetes Fermigas

(verdünnt, nicht-relativist. Quantengas)

$$j = e^{\mu/kT} \ll 1$$

d.h.  $\mu < 0$ ,  $z = \frac{\mu}{kT} < 0$



Entwicklung des Fermi-Dirac-Integrals nach Potenzen von  $\eta$ :

$$F_s(\eta) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty dy \frac{y^s}{e^{y-\eta} + 1}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty dy y^s \frac{y e^{-y}}{1 + y e^{-y}}$$

$y = \frac{p^2}{2mkT}$

$$\approx \frac{1}{\Gamma(s+1)} \left[ \int_0^\infty dy y^s e^{-y} - \int_0^\infty dy y^s e^{-2y} + \dots \right]$$

$$\underbrace{\int_0^\infty dy y^s e^{-y}}_{\Gamma(s+1)} - \underbrace{\int_0^\infty dy y^s e^{-2y}}_{\frac{1}{2^{s+1}} \int_0^\infty dz z^s e^{-z}}_{\Gamma(s+1)} + \dots$$

$$F_s(\eta) = e^{\frac{\mu}{kT}} \left[ 1 - \frac{1}{2^{s+1}} e^{\frac{\mu}{kT}} \right]$$

↑  
Boltzmann-  
limit

↑  
Quantenkorrektur

$$\bar{N} = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2mkT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} F_{1/2}(\eta)$$

$$N_c := (2s+1) \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2}$$

Entartungskonzentration

$$\approx V N_c e^{\mu/kT} \left( 1 - \frac{1}{2^{3/2}} e^{\mu/kT} \right)$$

Vollständige Nichtentartung  
 $\frac{\bar{N}}{V} \approx N_c e^{\mu/kT} \quad (\ll N_c)$   
 $\ll 1$

$$U \approx \frac{3}{2} kT V N_c e^{\mu/kT} \left( 1 - \frac{1}{2^{5/2}} e^{\mu/kT} \right)$$

Elimination von  $\mu$  durch  $\bar{N}$ : (wie beim realen Gas)

$$\bar{N} = V N_c \left[ 1 - 2^{-3/2} \right]$$

0. Näherung:  $\bar{N} = V N_c$

1. Näherung:  $\bar{N} = V N_c \left[ 1 - 2^{-3/2} \frac{\bar{N}}{V N_c} \right]$

$\Rightarrow$

Real. Zustandsgleichung

$$\Rightarrow U = \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[ 1 + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c} \right] \left[ 1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c} \right]$$

$$U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[ 1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c(T)} \right]$$

$$pV \approx \frac{2}{3} U = kT \bar{N} \left[ 1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c(T)} \right]$$

Therm. Zustandsgleichung

ideales Gas

Quantenkorrektur

(durch Fermi-Abstoßung)