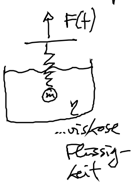
5. Eindimensionaler harmonischer Oszillator

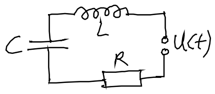
· volles Problem: $$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{ges}(x,\dot{x},t) \\ \text{mit } F_{ges}(x,\dot{x},t) &= \underbrace{-fx}_{\substack{\text{harm.}/\\ \text{Federkraft}}} \underbrace{-\alpha\dot{x}}_{\substack{\text{Stokes-}\\ \text{sche}\\ \text{Reibung}}} + \underbrace{F(t)}_{\substack{\text{einge-}\\ \text{prägte}\\ \text{Kraft}}} \end{aligned}} \quad (5.1)$$

· Realisierung:

mechanisch
Maxwell-Körper



elektromagnetischer
Schwingkreis



$$\underbrace{L\ddot{Q}}_{\text{„Masse"}} + \underbrace{R\dot{Q}}_{\text{„Reibung"}} + \underbrace{\frac{1}{C}Q}_{\text{„Feder"}} = U(t), \quad \dot{Q}(t) = I(t)$$

· harm. Oszillator: – fundamentale Bedeutung der Physik
– eines der wenigen exakt lösbaren Probleme

· dient zur Veranschaulichung von fundamentalen Konzepten

· mathem. Details: [MMP, Kap. 8]

(5.1) lineare Dgl. 2. Ordnung in Zeit für $x(t)$ mit Inhomogenität $F(t)$ → $x_{part}(t)$

↳ Superpositionsprinzip

↳ 2 Integrat. Konst.

allg. Lsg: $$\boxed{x(t) = \underbrace{a x_1(t) + b x_2(t)}_{\substack{x_{hom}(t)\\ \text{Lsg. von homog. DGl.}}} + \underbrace{x_{part}(t)}_{\substack{\text{eine partikuläre}\\ \text{Lsg.}}}} \quad (5.2)$$

5.1 Ungedämpfte freie Bewegung

a) Lösung: · $\boxed{m\ddot{x} + fx = 0}$ (5.3)

· Lsg.: $$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t, \quad \omega_0^2 = \frac{f}{m} \ldots \text{Eigenfrequenz} \\ &= A\cos(\omega_0 t - \varphi) \qquad \left.\begin{aligned} &A \ldots \text{Amplitude} \\ &\varphi \ldots \text{Phase} \end{aligned}\right\} \text{der Schwingung} \end{aligned}} \quad (5.4)$$

$\left.\begin{aligned} A^2 &= a^2+b^2 \\ \tan\varphi &= \frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} a &= A\cos\varphi \\ b &= A\sin\varphi \end{aligned}\right.$

NB: $\cos(\omega_0 t - \varphi) = \cos\omega_0 t \cos\varphi + \sin\omega_0 t \sin\varphi$

b) Komplexe Darstellung: $z = x + iy$ (S.5)

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ i \,|\, \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Linearität}} \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad (S.6)$$

- syst. Lsg. durch Ansatz: $z(t) = e^{\lambda t}$ in (S.6)

$$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} + \omega_0^2 \cancel{e^{\lambda t}} = 0 \longrightarrow \boxed{\lambda^2 = -\omega_0^2} \;\xrightarrow{\sqrt{-1}=i}\; \boxed{\lambda = \pm i\omega_0}$$

.... „charakt. Polynom" (S.7)

$$\longrightarrow z(t) = \bar{a}\, e^{i\omega_0 t} + \bar{b}\, e^{-i\omega_0 t}, \quad \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{C}$$

NB: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$ Eulersche Relation

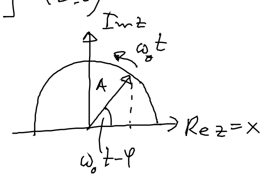
$$x(t) = \mathrm{Re}\, z(t) = \mathrm{Re}\left[A e^{i(\omega_0 t - \varphi)}\right] \quad (S.8)$$

o.B.d.A

(i) $\bar{a} = A e^{-i\varphi}$

$\bar{b} = 0$

$$= A \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

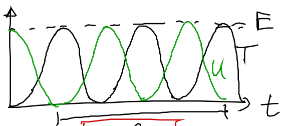


(ii) i.a.: bestimme $\bar{a}, \bar{b}$ so, daß Anfangsbed. erfüllt

c) Energiebilanz: $(\varphi = 0 \longrightarrow x(t) = A \cos \omega_0 t)$

- $E = T + U$ mit $U = \frac{f}{2} x^2 \longrightarrow -\frac{\partial U}{\partial x} = -fx, \quad f \overset{(S.4)}{=} m\omega_0^2$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 = \frac{m}{2}\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t) \\ U = \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2 = \frac{m}{2}\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t) \end{array}\right\} E = \frac{m}{2}\omega_0^2 A^2} \quad (S.9)$$



$\boxed{t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}}$ ... Periodendauer (S.10)

- Mittelwerte:

$$\left.\begin{array}{l} \langle T \rangle = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} dt\, T(t) = E \frac{1}{\omega_0 t_0}\int_0^{2\pi} \sin^2(\omega_0 t)\, d(\omega_0 t) \overset{\text{Trick}}{=} \frac{E}{2} \\ \langle U \rangle = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} dt\, U(t) = \frac{E}{2} \end{array}\right\} (S.11)$$

.... Gleichverteilung im Mittel!

$$\left[\text{NB: Trick: } \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sin^2 x + \cos^2 x\right] dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} 1\, dx = \frac{1}{2}\right]$$

d) Bewegung im Phasenraum: $\boxed{x\text{–}p\text{–Ebene}}$

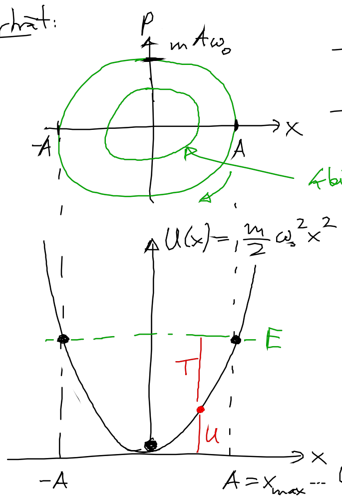
- p konjugierte Koord. zu x [s. analyt. Mechanik]

↳ $[px] = [Et] = \mathrm{Js}$ ... Wirkung

- hier:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = A \cos(\omega_0 t) \\ p(t) = m\dot{x}(t) = -m\underline{A\omega_0} \sin(\omega_0 t) \end{array}\right\} \text{Parameterdarstellung einer Ellipse}$$

• Phasenporträt:



– period. Bewegung
$\longrightarrow$ geschlossene Kurve

– Umlaufzeit: $t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

↳ bei neues E, A

• vgl.

… Umkehrpunkte

• Anharmonischer Oszillator: qualitatives Phasenporträt $\to$ Übung

• Wirkung einer Bewegung:

$$\boxed{S := \underbrace{\oint}_{\text{ein Umlauf}} \underbrace{p(x)\,dx}_{\text{eingeschlossene Fläche im Phasenraum}} = \int_0^{t_0} p\,\dot{x}\,dt} \qquad (5.12)$$