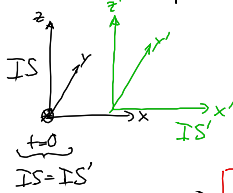


### 16.3 Der Minkowski-Raum

- Lichtpuls: sphärische Ausbreitung in IS & IS'



$$\rightarrow -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -c^2 t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad (16.9)$$

... Norm im Minkowski-Raum ist Lorentz-Skalar

- Minkowski-Raum: = 4D Raumzeit

(Kontinuierlicher)

Vierervektor:  $\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$  Komp:  $x^\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, 3$  (16.10)

- Minkowski-Norm:

$$\Delta s^2 = x^\alpha g_{\alpha\beta} x^\beta = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad (16.11)$$

mit g<sub>μν</sub> Elemente von  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$  ... metrischer Tensor (16.12)

- kovarianter Vierervektor:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \text{ Komp.: } x_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta \quad (16.13)$$

- Minkowski-Norm:

$$\Delta s^2 = x^\alpha x_\alpha \quad (16.14)$$

↑  
(16.11) mit (16.13)

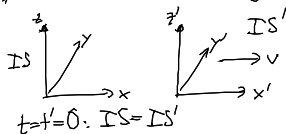
### 16.4 Die Lorentz-Trafo

- Trafo von IS  $\rightarrow$  IS'

• Def:

Die Minkowski-Norm (16.9) ist invariant unter Lorentztrafo

- „boost“ in x-Richtung: also  $y=y', z=z'$



allg. lineare Trafo:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (16.15)$$

⋮ s Folie

$$x' = \gamma (x - \beta ct)$$

$$ct' = \gamma (ct - \beta x)$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(16.16)

Lorentz-Trafo  
für boost in  
x-Richtung





(ii) zeitliche Komponente:  $\alpha=0$

- Geschwindigkeitsquadrat:

$$u^\alpha u_\alpha = \gamma^2 (-c^2 + v^2) = -c^2 \quad (16.26)$$

(16.21)  $\uparrow$   $-c^2(1-\frac{v^2}{c^2})$

- Betrachte:  $\frac{1}{2} m \frac{d}{dz} u^\alpha u_\alpha = 0 = m u_\alpha \frac{du^\alpha}{dz} = u_\alpha \frac{dp^\alpha}{dz}$

$$\rightarrow 0 = u_\alpha K^\alpha = -\frac{u^0}{\gamma c} K^0 + \gamma v \cdot \frac{K}{\gamma F}$$

also: 
$$\boxed{K^0 = \frac{\gamma}{c} v \cdot F}$$
  

$$= \frac{\gamma}{c} W$$

pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit

- Energiesatz! aus 0.ter Komp. von Impulsatz

$$\frac{dp^0}{dz} = \gamma \frac{dp^0}{dt} = K^0 = \frac{\gamma}{c} v \cdot F$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = v \cdot F} \quad (16.27)$$

mit  $E = c p^0 = \gamma m c^2$  ... Energie eines Teilchens  
 (16.22)

Grenzf.  $\frac{v}{c} \ll 1$

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} c^2 \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

$$\rightarrow \boxed{E = mc^2 + \frac{1}{2} m v^2} \quad (16.28)$$

Ruheenergie      kinet. Energie