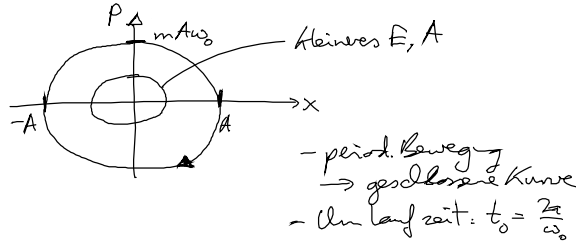


d) Bewegung im Phasenraum: $x-p$ -Ebene

- p konjugierte Koord. zu x \hookrightarrow Umwandlung von komplexer Bewegung Bsp. $e^{i\omega t}$ in Parametrisierung einer Ellipse
- hier: $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$
 $p(t) = m\dot{x}(t) = -m A \omega_0 \sin(\omega_0 t)$

- Phasenporträt:



- Wirkung einer Bewegung:

$$S := \oint p(x) dx = \int_0^{t_0} p \dot{x} dt \quad (5.12)$$

eingeschlossene
ein Umlauf im Phasenraum

- harm. Oszillator: $S = \pi m \omega_0 A^2 = 2\pi \frac{E}{\omega_0} = E t_0!$ (5.13)

\uparrow Ellipse = $\frac{\pi a b}{\pi a b}$ \uparrow (5.1) $E = \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2$

- Klassik: S kontinuierlich

$$QM: \left. \begin{aligned} S_n &= 2\pi \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, \dots, \infty \\ \frac{E = S/\hbar}{(5.13)} &\Rightarrow E_n = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \right\} (5.14)$$

Plancksche Quantenhypothese

Bohr: S_n auch für e^- im Atom

5.2 Gedämpfter, freier harmonischer Oszillator

• (5.1) $\rightarrow m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + f x = 0$ $\begin{cases} x = \text{Re}z \\ f = m\omega_0^2 & (5.4) \\ \gamma = \frac{\alpha}{2m} & (5.5) \end{cases} \quad \ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad (5.16)$

nicht konserv. System!

- Lsg. ansatz: $z(t) \sim e^{\lambda t}$ in (5.16)

$\rightarrow \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$... charakt. Polynom

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ (5.17)

allg. Lsg. $z(t) = \bar{a} e^{\lambda_1 t} + \bar{b} e^{\lambda_2 t}, \quad \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{C}$ (5.18)

• Einwirkung:

Energiebilanz: $\frac{d}{dt}(T+U) = F_{\text{diss}} \cdot \dot{x} = -\alpha \dot{x}^2 \dots$ dissip. Energie pro Zeiteinheit

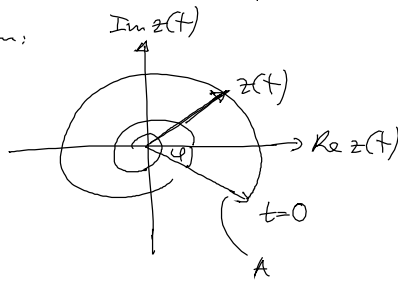
• Fallunterscheidung

a) geringe Dämpfung: $\gamma < \omega_0$

$\vec{F} = i \rightarrow \lambda_{1/2} = -\gamma \pm i \omega_d, \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$ (S.18)

(S.18) \rightarrow reelle Lsg: $x(t) = \text{Re } z(t) = \text{Re}[A e^{-\gamma t} e^{i(\omega_d t - \varphi)}]$
 $\bar{a} = A e^{-i\varphi}$
 $\bar{b} = 0$
 $= A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t - \varphi)$
 "gedämpfte Amplitude; period. Schwingung"

• Zeigerdiagramm: für komplexe Lsg.



• reelle Lsg = frei abklingende Schwingung mit ω_d :



2 Kenngrößen

1. Relaxationszeit/Abklingzeit: $\tau = \frac{1}{\gamma} \stackrel{(S.18)}{=} \frac{2m}{\alpha}$ (S.21)

2. Oscillatorgüte:

$Q = \frac{2\pi \text{ mittlere Energie: } \frac{\omega_d}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_d} (T+U) dt}{\text{Energieverlust pro Periode: } \alpha \int_0^{2\pi/\omega_d} \dot{x}^2 dt}$ (S.22)

hohe Güte: $\tau \gg \frac{1}{\omega_d}$
 $\frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t} \leftarrow$ (S.9)

$Q \approx 2\pi \frac{\frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}}{\alpha A^2 e^{-2\gamma t} \omega_d^2 \int_0^{2\pi/\omega_d} \sin^2(\omega_d t - \varphi) dt}$

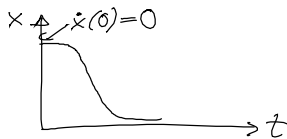
$\omega_d \approx \omega_0 \rightarrow Q = \frac{m \omega_0}{\alpha} = \frac{\omega_0 \tau}{2} \gg 1$ (S.23)

b) starke Dämpfung: $\gamma > \omega_0 \rightarrow \lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R}$
 rein exp. Abfall $x(t) = a e^{-(\gamma - \sqrt{\dots})t} + b e^{-(\gamma + \sqrt{\dots})t}$ (S.24)
 $a, b \in \mathbb{R}$



c) aperiodische Grenzfall. $\gamma = \omega_0 \rightarrow \lambda_{1/2} = -\gamma$
 Lsg. "entartet"

„Matte“ $x(t) = a e^{-\gamma t} + b t e^{-\gamma t}$ (S.25)



- Anwendung: ideal für Meßgeräte
 ideale Dämpfung, fliegt am schnellsten ab: $\gamma > \gamma - \sqrt{\dots}$
 \rightarrow Zeiger geht am schnellsten gegen Meßwert

5.3 Harmonischer Oszillator mit eingepprägter Kraft (erzwungene Schwingung)

• Grundgl.: $m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + m \omega_0^2 x = F(t)$ (S.26)

allg. Lsg.: $x(t) = \underbrace{x_{\text{hom}}(t)}_{\text{bekannt}} + \underbrace{x_{\text{part}}(t)}_{\text{unbekannt}}$ (S.27)

a) harmonische Kraft: $F(t) = F_0 \cos \omega t$

• Übergang ins Komplexe: $x(t) = \text{Re } z(t)$

$\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$ (S.28)

• Erfahrung: nach Einschwingen folgt Oszillator der Kraft

\rightarrow Ansatz: $z_{\text{part}}(t) = A_\omega e^{i\omega t}$ (S.29)

in (S.28): $(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2) A_\omega e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$

\rightarrow mit $A_\omega = \chi(\omega) \frac{F_0}{m}$
 $\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}$ (S.30)

... dynamische Suszeptibilität

(i) $\chi(\omega) = f(\omega, \underbrace{\omega_0, \gamma}_{\text{Konstanten}})$

(ii) vermittelt Antwort A_ω auf äußeres Feld / Störung / Kraft

(iii) $\chi(0)$... statische Suszeptibilität

(iv) andere Bsp: Magnetisierung $\underline{M} = \chi_m \underline{H}$
 Polarisation $\underline{P} = \chi_e \underline{E}$

• Umformung: Einmessung:

$$\frac{1}{a+ib} \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} e^{i\delta}, \quad \tan \delta = -\frac{b}{a}$$

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i \chi''(\omega) = |\chi(\omega)| e^{-i\delta(\omega)} \quad (S.32)$$

mit

$$\chi'(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \quad \chi''(\omega) = \frac{-2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} < 0$$

$$|\chi(\omega)| = \sqrt{\chi(\omega)\chi^*(\omega)} = \frac{1}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}} \quad \tan \delta(\omega) = -\frac{\chi''}{\chi'} = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (S.33)$$

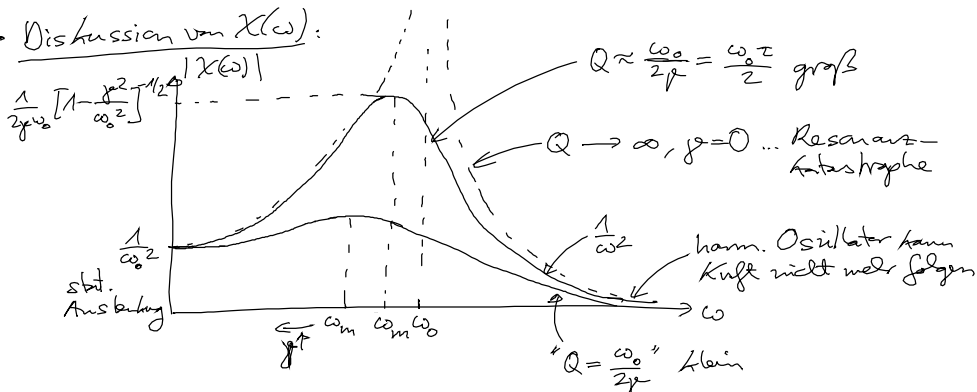
• reelle Lsg: $x(t) = \text{Re } z(t) = \text{Re} \left[\underbrace{z_{\text{hom}}(t)}_{(S.20)} + \underbrace{|\chi(\omega)| \frac{F_0}{m} e^{i(\omega t - \delta(\omega))}}_{z_{\text{part}}(t)} \right]$

$$\rightarrow x(t) = \underbrace{\text{Re } e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t - \psi)}_{x_{\text{hom}}(t)} + \underbrace{|\chi(\omega)| \frac{F_0}{m} \cos[\omega t - \delta(\omega)]}_{x_{\text{part}}(t)} \quad (S.33a)$$

Ein schwingungsvorgang $\rightarrow 0, t \gg \tau = \gamma^{-1}$ eingeschwungener Zustand "Resonanzanregung"

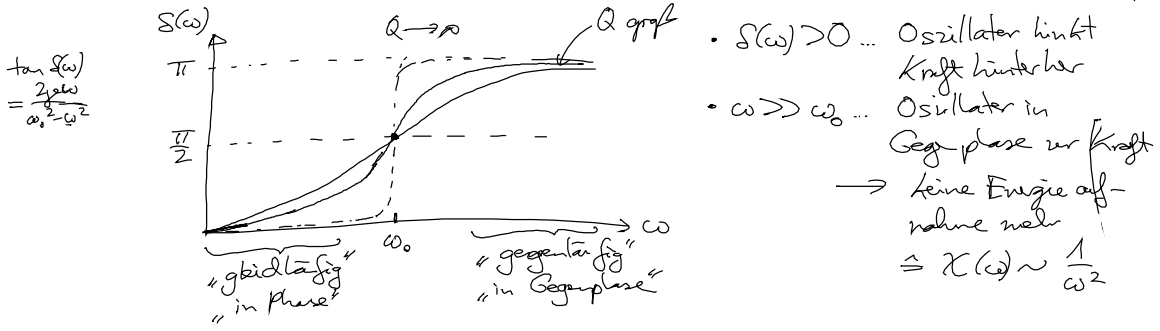
• transientes Verhalten: $x_{\text{hom}}(t)$ & $x_{\text{part}}(t)$
 $\hat{=}$ Überlagerung zweier Schwingungen: i.a. $\omega_d \neq \omega$

• Diskussion von $\chi(\omega)$:



Maximum: $\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0, \quad \gamma < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$

$[(1-x)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x \approx \omega_0 (1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2})], \quad \gamma \rightarrow 0 \quad (S.35)$



• Näherung: $\Delta\omega = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$, $\gamma \ll \omega_0$

(5.30) $\rightarrow K(\Delta\omega) = -\frac{1}{2\omega_0(\Delta\omega - i\gamma)}$

$\Gamma \omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0 - \Delta\omega$

$\rightarrow |K(\Delta\omega)| \approx \frac{1}{2\omega_0\gamma \sqrt{1 + (\frac{\Delta\omega}{\gamma})^2}}$

... Maximum (Peak) mit Breite $\approx \gamma$, Höhe $\approx \frac{1}{\gamma}$

$\rightarrow \tan S(\omega) \approx -\frac{\gamma}{\Delta\omega}$ (5.36)

... Übergangsbereich: Breite $\approx \gamma$