II. Newtonsche Mechanik für Vielteilchen-Systeme

8. Newtonsche Grundgleichungen & Folgerungen

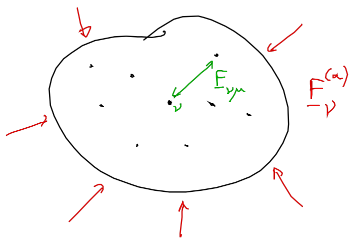
8.1 Grundgleichungen

• „Newton" für Massepkte $\nu = 1 \dots N$

$$\boxed{\begin{aligned} m_\nu \ddot{\underline{r}}_\nu &= \frac{d}{dt}\underline{p}_\nu = \underline{F}_\nu \\ \text{mit}\quad \underline{F}_\nu &= \underline{F}_\nu^{(a)} + \underline{F}_\nu^{(i)} \\ &= \underbrace{\underline{F}_\nu^{(a)}}_{\text{äußere Kräfte}} + \underbrace{\sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu\neq\nu}}^{N} \underline{F}_{\nu\mu}}_{\text{innere Kräfte}} \end{aligned}} \quad (8.1)$$

… 3N Dgl. für 3N Ortskoord.

innere Kräfte von allen anderen Massepkten: Zweiteilchenkräfte



• äußere Kräfte: Bsp: Schwerkraft der m_ν
Kräfte aufgrund EM-Feldes

(i) äußere Gesamtkraft: $\underline{F}^{(a)} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{F}_\nu^{(a)}$ (8.2)

(ii) „abgeschlossenes" System: $\underline{F}^{(a)} = 0$ (8.3)

im engeren Sinne: $\underline{F}_\nu^{(a)} = 0$

• innere Kräfte: Bsp: Coulomb, Gravitations } Kräfte
chem. Bindungskräfte (in Molekülen, etc...)

(i) $\underline{F}_{\nu\mu} = \underbrace{\underline{F}_{\nu\mu}(\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu)}$ … Kraft von m_μ auf m_ν

Annahme: $\underline{F}_{\nu\mu} \parallel \underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu$ … Zentralkräfte

(ii) actio = reactio $\longrightarrow$ $\boxed{\underline{F}_{\nu\mu}(\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu) = -\underline{F}_{\mu\nu}(\underline{r}_\mu - \underline{r}_\nu)}$ (8.4)

$\longrightarrow$ $\boxed{\underline{F}_{\nu\nu} = 0 \longrightarrow \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu\neq\nu}}^{N} \underline{F}_{\nu\mu} = \sum_{\mu=1}^{N} \underline{F}_{\nu\mu}}$ (8.5)

(iii) innere Gesamtkraft:

$$\boxed{\underline{F}^{(i)} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{F}_\nu^{(i)} = \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \underline{F}_{\nu\mu} \overset{(8.4)}{=} 0} \quad (8.6)$$

8.2 Folgerungen

a) Impulssatz

- Def: Gesamtimpuls $\boxed{\underline{P} = \sum_\nu \underline{p}_\nu = \sum_\nu m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu}$ (8.7)

- $\sum_\nu$ (8.1) $\quad \dot{\underline{P}} = \sum_\nu \dot{\underline{p}}_\nu = \sum_\nu \underline{F}_\nu^{(a)} + \underbrace{\sum_{\nu\mu} \underline{F}_{\nu\mu}}_{=0}$ [s. (8.6)]

$\longrightarrow$ Impulssatz: $\boxed{\dot{\underline{P}} = \sum_\nu \underline{F}_\nu^{(a)} = \underline{F}^{(a)}}$ (8.8)

zeitl. Änderung von $\underline{P}$ = Summe der angreifenden Kräfte

- „abgeschlossenes" System: $(\underline{F}^{(a)} = 0)$: $\boxed{\dot{\underline{P}} = 0 \longrightarrow \underline{P} = \text{konst.}}$ (8.9)

b) Schwerpkt. satz = Impulssatz:

- Def: Schwerpkts. koordinate: (8.10)

$$\underline{R} = \frac{\sum_{\nu=1}^N m_\nu \underline{r}_\nu}{M} \quad \text{mit } M = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \ \text{... Gesamtmasse}$$

... „Mittelpkt" der trägen (& schweren) Masse

NB: unabh. von Wahl des KS:

$$\underline{r}_\nu = \underline{r}_\nu' + \underline{d} \ \xrightarrow[(8.10)]{\text{in}} \ \underline{R} = \underline{R}' + \underline{d}$$

- Schwerpkt. satz:

$$\dot{\underline{P}} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \ddot{\underline{r}}_\nu = M\ddot{\underline{R}} \quad \text{in (8.8)}$$

$\longrightarrow$ $\boxed{M\ddot{\underline{R}} = \underline{F}^{(a)}}$ (8.11)

Der Schwerpkt. bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse M in ihm vereinigt sei und alle (äußeren) Kräfte an ihm angreifen

Bem: (i) keine $\underline{F}_{\nu\mu}$ in (8.11) $\longrightarrow$ „Man kann sich nicht am eigenen Schopf aus dem Sumpf ziehen"

(ii) jeder Körper (aus m_ν) $\underset{\text{verhält sich wie}}{\equiv}$ Massepkt $(M, \underline{R})$ & innere Bewegung

c) Drehimpulssatz

- Def: Gesamtdrehimpuls

$$\boxed{\underline{L} = \sum_{\nu=1}^N \underline{L}_\nu \quad \text{mit } \underline{L}_\nu = m_\nu \underline{r}_\nu \times \dot{\underline{r}}_\nu = \underline{r}_\nu \times \underline{p}_\nu} \quad (8.12)$$

Bem: bezogen auf Ursprung des KS!

• Herleitung:

$\sum_\nu \underline{r}_\nu \times \underbrace{(8.1)}_{m_\nu \ddot{\underline{r}}_\nu = \underline{F}_\nu}$

l.S.: $\sum_\nu m \underline{r}_\nu \times \ddot{\underline{r}}_\nu = \sum_\nu m \left[\frac{d}{dt}(\underline{r}_\nu \times \dot{\underline{r}}_\nu) - \underbrace{\dot{\underline{r}}_\nu \times \dot{\underline{r}}_\nu}_{=0}\right] \overset{(8.12)}{=} \dot{\underline{L}}$

r.S.: $\underline{D} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{r}_\nu \times \underline{F}_\nu^{(a)} + \underbrace{\sum_{\nu,\mu=1}^{N} \underline{r}_\nu \times \underline{F}_{\nu\mu}}$

$= \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu} (\underline{r}_\nu \times \underline{F}_{\nu\mu} + \underline{r}_\mu \times \underbrace{\underline{F}_{\mu\nu}}_{-\underline{F}_{\nu\mu}})$ ... actio = reactio

$= \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu} (\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu) \times \underline{F}_{\nu\mu}$

$= 0$, falls $\underline{F}_{\nu\mu} \parallel \underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu$

$$\boxed{\text{Zentralkräfte } \underline{F}_{\nu\mu} \longrightarrow \text{Gesamtdrehmoment der inneren Kräfte } \underline{D}^{(i)} = \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \underline{r}_\nu \times \underline{F}_{\nu\mu} = 0} \quad (8.13)$$

$\longrightarrow$ Drehimpulssatz:

$$\boxed{\frac{d\underline{L}}{dt} = \underline{D} \quad \text{mit} \quad \underline{D} = \sum_\nu \underline{r}_\nu \times \underline{F}_\nu^{(a)}} \quad (8.14)$$

... Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte

• Drehimpulserhaltung:

$$\boxed{\underline{D} = 0 \longrightarrow \dot{\underline{L}} = 0 \longrightarrow \underline{L} = \text{const.}} \quad (8.15)$$

Bsp: abgeschlossenes System (im engeren Sinne): $\underline{F}_\nu^{(a)} = 0$!

d) Energiesatz:

• Annahme: konservative Kräfte $\longrightarrow$ Potentiale existieren

äußere Kräfte: $\underline{F}_\nu^{(a)} = -\mathrm{grad}_\nu U^{(a)}$ mit $U^{(a)} = \sum_{\nu=1}^{N} U_\nu^{(a)}(\underline{r}_\nu)$ (8.16)

bzgl. $\underline{r}_\nu$

innere Kräfte: $\underline{F}_{\nu\mu} = -\mathrm{grad}_\nu U_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|)$ (8.17)

$= -\underline{F}_{\mu\nu} = +\mathrm{grad}_\mu U_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|)$

• Energieerhaltungssatz (EES):

$\sum_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \Big| \; m\ddot{\underline{r}}_\nu = \underline{F}_\nu^{(a)} + \sum_\mu \underline{F}_{\nu\mu}$

(i) l.S.: $\sum_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot m_\nu \ddot{\underline{r}}_\nu = \frac{d}{dt} \sum_\nu \frac{m_\nu}{2} \dot{\underline{r}}_\nu^{\,2} = \frac{d}{dt} T$

Def: kinet. Gesamtenergie $\boxed{T = \sum_\nu \frac{m_\nu}{2} \dot{\underline{r}}_\nu^{\,2}}$ (8.18)

(ii) r.S.: äußere Kräfte:

$\sum_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \underline{F}_\nu^{(a)} \overset{(8.16)}{=} -\sum_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \mathrm{grad}_\nu U^{(a)} = -\frac{d}{dt} U^{(a)}$

Def: Ges. pot. Energie im äußeren Kraftfeld $\boxed{U^{(a)} = \sum_\nu U_\nu^{(a)}(\underline{r}_\nu)}$ (8.19)

(iii) r. S: innere Kräfte:

$$\sum_{\nu\mu} \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \underline{F}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} \left(\dot{\underline{r}}_\nu \cdot \underline{F}_{\nu\mu} + \dot{\underline{r}}_\mu \cdot \underline{F}_{\mu\nu} \right)$$

$$\overset{(8.17)}{=} -\frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} \left[\dot{\underline{r}}_\nu \cdot \operatorname{grad}_\nu U_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|) + \dot{\underline{r}}_\mu \cdot \operatorname{grad}_\mu U_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|) \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} \frac{d}{dt} U_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|) = -\frac{d}{dt} U^{(i)}$$

<u>Def:</u> Ges. Ww.energie im System

$$\boxed{U^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} U_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|)} \quad (8.20)$$

$$\xrightarrow{(i)\,\&\,(ii)\,\&\,(iii)} \quad \frac{d}{dt}\left(T + U^{(a)} + U^{(i)}\right) = 0 \quad (8.21)$$

$\longrightarrow$ <u>EES bei kons. Kräften:</u> $\boxed{T + U^{(a)} + U^{(i)} = E}$ (8.22)

Gesamtenergie

• mit dissipativen Kräften: $\underline{F}_{\nu,diss}$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\left[T + U^{(a)} + U^{(i)}\right] = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{F}_{\nu,diss} \cdot \dot{\underline{r}}_\nu} \quad (8.23)$$

• Arbeit am System: von Zustand $(1) = \{\underline{r}_\nu(t_1)\}$ nach $(2) = \{\underline{r}_\nu(t_2)\}$

$$\boxed{A_{12} = \sum_\nu \int \underline{F}_\nu \cdot d\underline{r}_\nu = \sum_\nu \int \underline{F}_\nu \cdot \dot{\underline{r}}_\nu \, dt} \quad (8.24)$$

$$\sum_\nu \underline{F}_\nu \cdot \dot{\underline{r}}_\nu = \frac{d}{dt} T \longrightarrow \boxed{T(2) - T(1) = A_{12}} \quad (8.25)$$

• konservative Systeme:

$$\xrightarrow[(8.20)]{(8.19)\,\&} \boxed{A_{12} = -\left[U^{(a)}(2) + U^{(i)}(2) - U^{(a)}(1) - U^{(i)}(1)\right]} \quad (8.26)$$