

Wkt:

ψ -Kontinuitäts-Spinor

$$\psi_{\vec{p}, \lambda}(\vec{r}, t)$$

$$\lambda = +$$

$$\psi_{\vec{p}, +}$$

$$= N \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ -\varphi_1 \\ \frac{c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_+ + m_0 c^2} \varphi_1 \\ -\varphi_1 \end{pmatrix}$$

Z-Kontinuitäts-Vektor

$\lambda = +, -$
 \uparrow positive Energie
 \nwarrow negative Energie

$$= \frac{1}{\hbar} (E_+(\vec{p}) E - \vec{p} \cdot \vec{r})$$

$\times e$

wähle: $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 \uparrow $\epsilon = 1$ \uparrow $\epsilon = 2$

$$E_{\pm}(\vec{p}) = \pm c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$$

$(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3$
 Pauli-Matrizen)

$$\text{mit } \vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & p_x \\ p_x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i p_y \\ i p_y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_z & 0 \\ 0 & -p_z \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} p_z & p_x - i p_y \\ p_x + i p_y & -p_z \end{pmatrix}$$

Nach Berechnung von N (aus $\psi \psi^* = 1$)

sind die Lösungen der Dirac-Gl. für das freie Teilchen festgelegt

Explizit

$$\psi_{\vec{p}, +, \epsilon=1} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c p_z}{E_+ + m_0 c^2} \\ \frac{c(p_x + i p_y)}{E_+ + m_0 c^2} \end{pmatrix} e^{-i/\hbar (E_+ t - \vec{p} \cdot \vec{r})}$$

$$\psi_{\vec{p}, +, \epsilon=2} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x - i p_y)}{E_+ + m_0 c^2} \\ -\frac{c p_z}{E_+ + m_0 c^2} \end{pmatrix} e^{-i/\hbar (E_+ t - \vec{p} \cdot \vec{r})}$$

$$\psi_{\mathbf{p}, \lambda=-1, \varepsilon=1} = N \begin{pmatrix} \frac{-c p_x}{-E_- + m_0 c^2} \\ -c(p_x + i p_y) \\ \frac{-c p_x}{-E_- + m_0 c^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i/\hbar (E_- t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \quad -E_- = E_+$$

$$\psi_{\mathbf{p}, \lambda=-1, \varepsilon=2} = N \begin{pmatrix} \frac{-c(p_x - i p_y)}{-E_- + m_0 c^2} \\ \frac{c p_z}{-E_- + m_0 c^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i/\hbar (-E_- t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}$$

Bemerkungen

a) Die Lösungen sind ebene Wellen, die durch drei Quantenzahlen charakterisiert sind

- Impuls \mathbf{p} (Kontinuum)
- Energie-Quantenzahl $\lambda = \pm 1$ (für jedes \mathbf{p})
dabei/untere "Energieeigen"
- Quantenzahl $\varepsilon = 1, 2$ (für jedes λ)

Die 4 Spaltenvektoren sind orthogonal zueinander

b) Ein allgemeines Spinor ψ kann dargestellt werden als Überlagerung der 4 "Basiszustände" (aufgrund der Linearität der Dirac-Gl. !)

c) Die $\psi_{\mathbf{p}, \lambda, \varepsilon}$ sind Eigenfunktionen zu

i) Dirac-Operator \hat{H}_D

dabei mit: Quantenzahl λ bzw. Energieeigenwert $E_\lambda(\mathbf{p})$ für festes \mathbf{p}

ii) Impulsoperator \vec{p}

dazu gehört Quantenzahl p (Eigenwert p)

iii) "weiterer Operator" (??)

dazu gehört Quantenzahl ϵ (Eigenwert ϵ)

Idee: Die drei Operatoren bilden eine vollständigen Satz
Kommutierender Observablen

(ähnlich wie A, \hat{L}^2, \hat{L}_z beim ^{nicht-relativ} Teilchen im Zentralpotential
 $[A, \hat{L}^2] = 0$, $[A, \hat{L}_z] = 0$
 $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$)
Quantenzahlen n, l, m

Frage: Was ist der "weiterer Operator" ?

d) Der gesuchte Operator ist der sogenannte "Helizitätsoperator" $\hat{\Lambda}$ ^{großes Lambda}

Definition: $\hat{\Lambda} = \frac{\hat{S}}{|\mathbf{p}|} \cdot \mathbf{p}$ mit \hat{S} dreikomponentiger Vektor, dessen
Komponenten S_x & Matrizen sind

$\hat{\Lambda}$ ist also die Projektion
des "Dirac-Spinoperators \hat{S} "

auf die Richtung des Impulses,
d.h. die Ausbreitungsrichtung der
ebene Welle

$\left(\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right)$: Einheitsvektor in Richtung
von \mathbf{p}

$$\hat{S}^i = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^i & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^i \end{pmatrix}$$

(Pauli-Matrizen)

Es gilt:

$$\bullet [\hat{S}^i, \hat{S}^j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{S}^k$$

$\Rightarrow \hat{S}^i$ erfüllen die "fundamentale
Drehimpulsrelationen"

$$\bullet [\hat{H}_D, \hat{S}] = -i\hbar c (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{p}) \neq 0$$

dabei: $[\hat{H}_D, \hat{\Lambda}] = 0$, $[\hat{\Lambda}, \hat{p}] = 0$

leicht zu zeigen über Matrixdarstellung von $\hat{H}_D, \hat{\Lambda}$

$$\hat{\Lambda} = \frac{\hbar}{2p} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y & 0 \\ p_x + ip_y & -p_z & 0 \\ 0 & 0 & \text{identisch} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \hat{\Lambda}$ ist ein Kandidat für den gesuchten "weiteren Operator", der mit \hat{H}_D und \hat{p} vertauscht, mit diesen Operatoren einen vollständigen Satz bildet und damit die Eigenzustände komplett klassifiziert

Berechne die Eigenwerte von $\hat{\Lambda}$

$$\hat{\Lambda} = \sum_{|p\rangle} \frac{p}{|p\rangle} = \frac{\hbar}{2p} \begin{pmatrix} \text{so.} & 0 \\ 0 & \text{so.} \end{pmatrix} \quad \text{siehe oben}$$

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

charakteristisches Polynom:

$$\left(\frac{\hbar}{2p} p_z - \lambda \right) \left(-\frac{\hbar}{2p} p_z - \lambda \right) - \left(\frac{\hbar}{2p} \right)^2 (p_x - ip_y)(p_x + ip_y) = 0$$

Eigenwert

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\hbar^2}{4} p_z^2 - \frac{\hbar^2}{(2p)^2} p_z^2 \right) - \frac{\hbar^2}{(2p)^2} (p_x^2 + p_y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{4} p_z^2 - \frac{\hbar^2}{4p^2} p^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{4} p_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Eigenwerte von } \hat{\Lambda} : \lambda = \pm \frac{\hbar}{2}$$

Häufig: Umkehrmap: $\eta \rightarrow m_s = \pm \frac{1}{2}$

Interpretation:

Zu jeder Energie E_+ bzw. E_- gibt es jeweils zwei Einstellmöglichkeiten des (Dirac-)Spins bezügl. der Impulsrichtung $\frac{p}{|p|}$

Ausgangspunkt:

Das relativistische Elektron hat neben der Masse m_0 und der Ladung ($-e_0$) noch eine weitere "Teilcheneigenschaft", nämlich den "Spin" (Eigendrehimpuls) S

Diese Eigenschaft ist für alle Elektronen ($\lambda = \pm 1$, p , $m_s = \pm \frac{1}{2}$) gleich!

Dann,

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \frac{\hbar^2}{4} \left(\begin{pmatrix} (\hat{G}^x)^2 & 0 \\ 0 & (\hat{G}^x)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\hat{G}^y)^2 & 0 \\ 0 & (\hat{G}^y)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\hat{G}^z)^2 & 0 \\ 0 & (\hat{G}^z)^2 \end{pmatrix} \right)$$

es gilt $\hat{G}^i = \hat{1}$, $i = x, y, z$ (1, 2, 3)

$$\hat{S}^2 = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix} = \hbar^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix}$$

$$= \hbar^2 s(s+1) \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boxed{s = \frac{1}{2}} \quad \text{"Teilcheneigenschaft"}$$

(analog Bahndrehimpuls: Quantenzahl l

Einstellmöglichkeiten m_l

$$m_l = -l, \dots, l$$

und $m_s = \pm \frac{1}{2}$

\Rightarrow man spricht von Spin $-\frac{1}{2}$ -Teilchen !!

Beachte schließlich \hat{H}_D

man kann zeigen $[\hat{H}_D, \hat{J}] \neq 0$ (und $[\hat{H}_D, \hat{S}] \neq 0$)

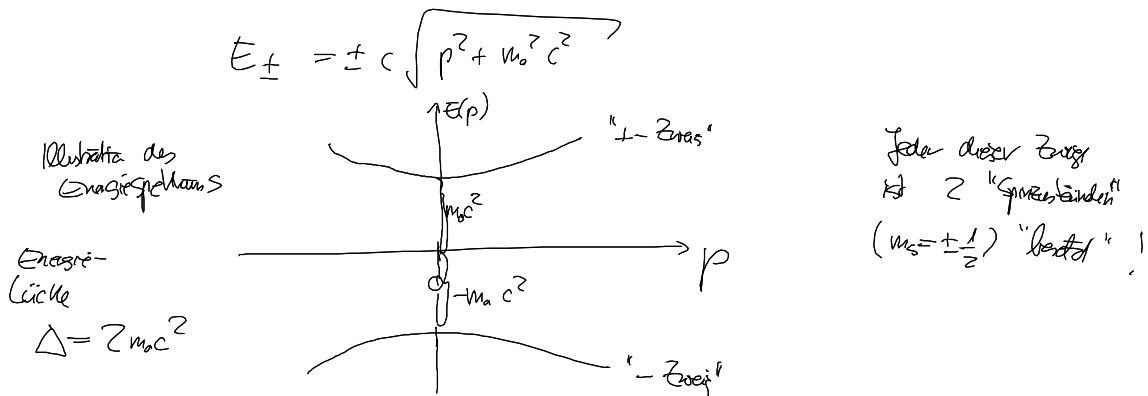
aber $[\hat{H}_D, \hat{L} + \hat{S}] = 0$
Gesamt Drehimpuls des Elektrons

Die Summe aus Bahndrehimpuls und Spin verhalten sich mit \hat{H}_D

e) Energiespektrum des Dirac-Teilchens

Wir haben gesehen:

Wie bei der Klein-Gordon-Gl. gibt es auch in Rahmen der Dirac-Theorie Lösungen mit positiver und negativer Energie



Frage: Können wir die Lösung mit E_- ignorieren?

Nein!

Denn: Beliebiger Spin ist Überlagerung von der 4 Basisvektoren und kann damit auch Anteile mit negativen Energie enthalten!

(\rightarrow Zitterbewegung, s. Übungsblatt)

Außerdem könnte man auf folgende Idee kommen:

Selbst wenn der Anfangszustand $\psi(t=0)$ positive Energie hat, könnte es durch Wechselwirkungen mit Strahlung Übergänge in Zustände mit ^{negativer} Energie kommen...

aber Ein Elektron aus dem "1-Zweig" zerfällt und aussenden eines Lichtquants ...

(Wären dann Photonen (Materie) überhaupt ver. stabil ... ?)

Dies wird aber nicht bearbeitet!

Dirac's Idee (1930): "Dirac-See"

Im Grundzustand sind alle Zustände mit negativer Energie vollständig besetzt (Vakuumzustand)

Wegen des Pauli-Prinzips können Teilchen mit positiver Energie dann nicht in Zustände negativer Energie übergehen

(Pauli-Prinzip: Für Teilchen mit halbzahligen Spin (insbesondere auch Elektronen) kann jeder Quantenzustand nur einmal besetzt werden!)

Ein Problem an diesem Bild

Man hat offensichtlich implizit angenommen, dass es unendlich viele Teilchen gibt

Das zeigt: Dirac-Gl. ist eigentlich eine Vielteilchentheorie
(\rightarrow Quantenfeldtheorie)

(Einkörperbild ist in diesem Sinne problematisch ...)

Experimentelle Beobachtung

Durch ein Lichtquant (Energie $h\nu$, Impuls $p = h\nu/c$)

kann ein Teilchen aus dem "E-Zweig" ("Dirac-See")

in einen Zustand mit positiver Energie gehoben werden (angeregter Zustand)

Im Vergleich zum Vakuumzustand hat dieser Zustand dann eine positive Ladung und positive Energie

\Rightarrow Erzeugung eines Positrons (Antiteilchen des Elektrons, selbe Referenz wie das Elektron) aber positive Ladung
und eines neuen Elektrons

Lichtquant $\rightarrow \gamma \rightarrow e^+ + e^-$